Geometrie: Woche 9

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 4. Juni 2021

Leseauftrag (für die Vorlesung am 8. Juni)**.** Wir beweisen den Satz von Pick und gehen danach auf die euklidische Isometriegruppe ein.

- Lesen Sie den Rest von Kapitel 3.3.3 *Flächeninhalte*.
- Lesen Sie Kapitel 3.4.1 *Winkeltreue*.

Leseauftrag (für die Vorlesung am 11. Juni)**.** Wir schließen die Beschreibung der euklidischen Isometriegruppe ab und beweisen die klassischen Kongruenzsätze in der euklidischen Ebene.

- Wiederholen Sie *orthogonale Matrizen/Abbildungen* und ihre Eigenschaften (Lineare Algebra).
- Lesen Sie Kapitel 3.4.2 *Die euklidische Isometriegruppe*.
- Lesen Sie Kapitel 3.4.3 *Kongruenz*.
- Lesen Sie Kapitel 3.4.4 *Reguläre Polygone* bis Bemerkung 3.4.16.

Nächste Woche betrachten wir auch reguläre Polyeder sowie Pflasterungen der Ebene. Dann beginnen wir den letzten großen Abschnitt der Vorlesung: Die Konstruktion bzw. Untersuchung der hyperbolischen Ebene.

Fingerübung (euklidische Isometrien)**.** Welche der folgenden Matrizen beschreiben (bezüglich der Standardbasis auf $\mathbb{R}^2$) euklidische Isometrien $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$? Skizzieren Sie die Abbildungen!

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgaben (für die Übungen am 15.–18. Juni)**.** Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 8) besprochen.

Bitte wenden

Aufgabe 8.1 (gleiche Krümmung). Seien $\gamma_1, \gamma_2 \colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisierte zweimal stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\dot\gamma_1(0) = \dot\gamma_2(0)$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist $\|\kappa_{\gamma_1}(t)\|_2 = \|\kappa_{\gamma_2}(t)\|_2$ für alle $t \in (-1,1)$, so folgt $\gamma_1 = \gamma_2$.
2. Ist $\kappa_{\gamma_1}(t) = \kappa_{\gamma_2}(t)$ für alle $t \in (-1,1)$, so folgt $\gamma_1 = \gamma_2$.

Aufgabe 8.2 (gleiche Winkel). Geben Sie ein Beispiel für einen Winkel $\alpha \in (0,\pi)$ und für Vektoren $v_0, \dots, v_4 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\forall_{j,k \in \{1,\dots,4\}} \quad j \neq k \Longrightarrow \sphericalangle(v_j - v_0, v_k - v_0) = \alpha.$$

Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis. Wer wenig rechnen möchte, kann mit einem Würfel beginnen …
Bonusaufgabe. Was hat das mit Methan zu tun?

Aufgabe 8.3 (kleine Dreiecke). Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Wir betrachten

$$\Delta(x,y,z) := \bigl\{ t_x \cdot x + t_y \cdot y + t_z \cdot z \bigm| t_x, t_y, t_z \in [0,1], t_x + t_y + t_z = 1 \bigr\} \subset \mathbb{R}^2$$

und nehmen an, dass $\Delta(x,y,z)$ außer x, y, z keine weiteren Punkte aus $\mathbb{Z}^2$ enthält. Zeigen Sie, dass

$$\bigl|\det(y - x, z - x)\bigr| = 1.$$

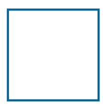
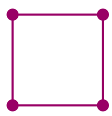
Hinweis. Warum ist $(y - x, z - x)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}^2$?

Aufgabe 8.4 (Isometriegruppe des Quadrats). Wir betrachten die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$

$$Q := \bigl([-1,1] \times \{-1,1\}\bigr) \cup \bigl(\{-1,1\} \times [-1,1]\bigr)$$

und den Graphen

$$X := (V,E) := \bigl(\{1,2,3,4\}, \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\}\}\bigr).$$

Wir versehen Q mit der von der euklidischen Metrik d_2 induzierten Metrik; wir versehen V mit der von X induzierten Metrik d.

1. Zeigen Sie: Ist $f \in \operatorname{Isom}(Q, d_2)$, so bildet f diagonal gegenüberliegende Punkte auf diagonal gegenüberliegende Punkte ab (Extremalprinzip!). Folgern Sie, dass $\operatorname{Isom}(Q, d_2)$ zu $\operatorname{Isom}(V, d)$ isomorph ist.
2. Bestimmen Sie die Isometriegruppe von (Q, d_2); d.h. geben Sie die Verknüpfungstabelle oder eine algebraische Beschreibung an. Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (Loch Ocht). Der schottische See Loch Ocht ist kreisförmig mit einem Radius von einer Meile. Aufgrund des dichten Nebels ist überhaupt nur erkennbar, was weniger als eine Meile entfernt ist. In diesem See leben acht Ungeheuer (sogenannte Ochties), die ihren Hals und Kopf, ihrem großen Vorbild Nessie nacheifernd, aus dem See recken. Zeigen Sie, dass es dann zwei Ochties gibt, die sich sehen können.
Hinweis. Extremalprinzip!

Abgabe bis spätestens 11. Juni 2021, 8:30, via GRIPS.