Geometrie: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold Blatt 10, 23. Juni 2023

Fingerübung (Symmetriegruppen). Bestimmen Sie die Isometriegruppen diverser Haushaltsgegenstände (bezüglich der von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik):

1. Bleistift (rund/dreieckig/sechseckig)
2. Kugelschreiber
3. A4-Papier
4. Teller
5. Tischtennisball
6. Tennisball
7. Steckdose
8. USB-Stecker
9. USB-C-Stecker
10. Pizza-Karton

Aufgabe 10.1 (Rotationen). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Jedes Element aus SO(3) lässt sich als endliches Produkt von Matrizen der folgenden Form schreiben (mit $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi]$):
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} R(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Jedes Element aus O(3) lässt sich als endliches Produkt von Matrizen der folgenden Form schreiben (mit $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi]$):
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\varphi) \end{pmatrix}$$

Bonusaufgabe. Was könnte das mit der Steuerung von Objekten in Computerspielen zu tun haben?

Aufgabe 10.2 (Konstruktion des regulären Fünfecks). Konstruieren Sie aus der Menge $\{(0,0),(1,0),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ mit Zirkel und Lineal ein reguläres Fünfeck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Radius 1. Beschreiben Sie die Konstruktion und beweisen Sie die Durchführbarkeit und Korrektheit der Konstruktion.
Hinweis. Was hat Aufgabe 6.2 mit den Kuchenstückdreiecken eines regulären Fünfecks vom Radius 1 zu tun?

Aufgabe 10.3 (Gleichseitigkeit für alle!). Der imperiale Hofmathematiker Isosceles des Trigon Empire hat die auf der auf der letzten Seite abgedruckte Arbeit vorgelegt. Was ist schiefgelaufen? Erklären Sie genau, was korrekt ist und was nicht.

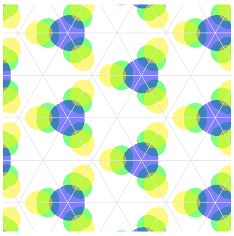
Bitte wenden

Aufgabe 10.4 (Kaleidoskop in LaTeX)**.** Vervollständigen Sie die LaTeX-Quelldatei caleidoscope_exercise.tex so, dass Sie einen Kaleidoskop-Bilder-Generator erhalten. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Vervollständigen Sie \caleidohexagon so, dass ein Sechseck aus sechs wie in einem Kaleidoskop gespiegelten Dreiecken entsteht.

2. Vervollständigen Sie dann das Programm durch geeignete Translationen von \caleidohexagon.

Hinweis. Wenn Sie keine eigene LaTeX-Installation haben, können Sie den Quellcode unter https://latex.informatik.uni-halle.de/latex-online/latex.php übersetzen. Die Vorlagen sind so gestaltet, dass die Aufgaben auch ohne Vorkenntnisse in LaTeX lösbar sind. Dokumentieren Sie Ihren Quellcode!



Bonusaufgabe (Gruppen und Würfel)**.** Vervollständigen Sie im OpenSCAD-Programm cube_exercise.scad die Funktion cube_isometries so, dass ein Würfel erzeugt wird. Erklären Sie den mathematischen Hintergrund Ihrer Lösung!
Hinweis. Installation und mehr Informationen: https://openscad.org/ . Man kann auch ohne genauere Kenntnis oder Installation von OpenSCAD ohne Schwierigkeiten erahnen, wie man die Aufgabe lösen kann!
Hinweis. Mit diesem Programm lassen sich 3D-Objekte für den 3D-Druck erstellen … frohes Experimentieren!

Bonusaufgabe (Gruppen aus Molekülen)**.**

1. Welche Symmetriegruppe haben Methanmoleküle? Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Welche chemischen Eigenschaften hängen mit der Symmetriegruppe von Molekülen zusammen? Wie? Belegen Sie Ihre Antwort durch geeignete Quellen.

Bonusaufgabe (Gruppen aus der Biologie)**.**

1. Geben Sie Beispiele für Blüten und ihre Isometriegruppen. Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Welche Isometriegruppe haben sphärische Viren zumeist? Geben Sie Beispiele für solche Viren und beschreiben Sie die Isometriegruppe genauer. Belegen Sie Ihre Antwort durch geeignete Quellen.

Abgabe bis spätestens 30. Juni 2023, 8:00, via GRIPS.

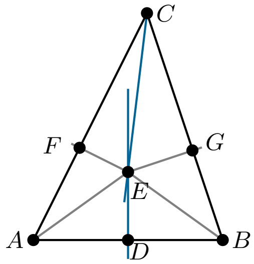
Satz (Großartiger Gleichseitigkeitssatz von Isosceles)**.** Jedes geodätische Dreieck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist gleichseitig, d.h.: Sind $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, so gilt

$$\|A - B\|_2 = \|B - C\|_2 = \|C - A\|_2.$$

Beweis. Angenommen, die drei Seiten wären absurderweise nicht alle gleich lang, ohne Einschränkung etwa $\|A - C\|_2 \neq \|B - C\|_2$.

Sei w die Winkelhalbierende an der Ecke C, d.h. w ist eine Gerade durch C und die Winkel zwischen w und $A - C$ bzw. zwischen w und $B - C$ sind gleich groß. Sei m die Mittelsenkrechte zu A und B, d.h. m ist orthogonal zu $B - A$ und geht durch $D := 1/2 \cdot (A + B)$.

Wegen $\|A - C\|_2 \neq \|B - C\|_2$ haben m und w genau einen Schnittpunkt E. Sei F der Schnittpunkt der zu $A - C$ orthogonalen Geraden durch E mit der Geraden durch A und C, und sei G der Schnittpunkt der zu $B - C$ orthogonalen Geraden durch E mit der Geraden durch B und C.



Dann erhalten wir die folgenden Beziehungen:

1. Nach Pythagoras ist $\|E - A\|_2 = \|E - B\|_2$, da m zu $B - A$ orthogonal ist und da $\|D - A\|_2 = 1/2 \cdot \|B - A\|_2 = \|D - B\|_2$.
2. Es gilt $\sphericalangle(G - E, C - E) = \sphericalangle(F - E, C - E)$; dies folgt aus der Winkelsumme in euklidischen Dreiecken sowie der Konstruktion von w als Winkelhalbierende und von F bzw. G als Lotfußpunkte. Mit dem Kongruenzsatz WSW erhalten wir daher
$$\|F - C\|_2 = \|G - C\|_2 \qquad \text{und} \qquad \|E - F\|_2 = \|E - G\|_2.$$
3. Mit den ersten beiden Schritten und Pythagoras folgt dann außerdem
$$\|A - F\|_2 = \|B - G\|_2.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Der Punkt E liegt innerhalb des von A, B, C aufgespannten Dreiecks. Dann gilt nach den obigen Vorüberlegungen
$$\begin{aligned}\|A - C\|_2 &= \|A - F\|_2 + \|F - C\|_2 \\ &= \|B - C\|_2 + \|G - C\|_2 = \|B - C\|_2.\end{aligned}$$
- Der Punkt E liegt außerhalb des von A, B, C aufgespannten Dreiecks. Dann gilt nach den obigen Vorüberlegungen
$$\begin{aligned}\|A - C\|_2 &= -\|A - F\|_2 + \|F - C\|_2 \\ &= -\|B - C\|_2 + \|G - C\|_2 = \|B - C\|_2.\end{aligned}$$

Es folgt also $\|A - C\|_2 = \|B - C\|_2$, im Widerspruch zu unserer grotesken Annahme. ∎