Geometrie: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold — Blatt 11, 30. Juni 2023

Fingerübung (hyperbolische Länge). Ordnen Sie diese Kurven $[0,1] \longrightarrow H \subset \mathbb{C}$ in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ der Länge nach! Skizzieren Sie die Kurven!

1. $t \longmapsto i + t$
2. $t \longmapsto 2023 \cdot i + t$
3. $t \longmapsto i + (1+i) \cdot t$
4. $t \longmapsto i + t + i \cdot t^2$

Aufgabe 11.1 (hyperbolische Metrik). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Abbildung $z \longmapsto z + 2023 \cdot i$ ist eine Isometrie von (H, d_H).
2. Es gilt $d_H(i, 1 + 2023 \cdot i) = \sqrt{2023}$.

   Hinweis. Muss man dazu $d_H(i, 1 + 2023 \cdot i)$ exakt berechnen?

Aufgabe 11.2 (Kongruenzsätze).

1. Beweisen Sie den Kongruenzsatz WSW in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
2. Beweisen Sie den Kongruenzsatz SsW in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Aufgabe 11.3 (hyperbolische Spiegelung). Wir betrachten die Abbildung

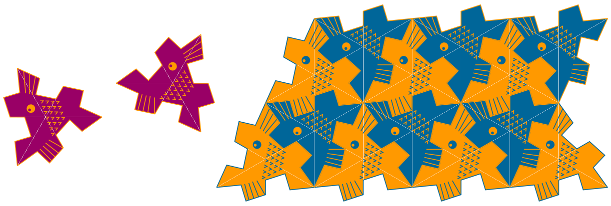
$$\begin{aligned} f\colon H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto -\overline{z}, \end{aligned}$$

wobei $\overline{z}$ die komplexe Konjugation von $z \in H \subset \mathbb{C}$ bezeichnet.

1. Veranschaulichen Sie f geeignet. Es gibt hier natürlich viel Spielraum; erklären Sie, warum/wie Ihre Veranschaulichung zur Definition passt!
2. Zeigen Sie, dass f eine riemannsche Isometrie $\mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ ist.

Aufgabe 11.4 (positive Definitheit der hyperbolischen Metrik). Seien $z, z' \in H$ mit $d_H(z, z') = 0$. Zeigen Sie, dass dann bereits $z = z'$ gilt.
Hinweis. Verwenden Sie die triviale Abschätzung für hyperbolische Längen; die vertikale Abschätzung hilft bei Kurven, die zu weit nach oben entfleuchen. Vergessen Sie nicht, dass die Definition ein „inf“ enthält, kein „min“.

Bonusaufgabe (Pflasterungen). Gestalten Sie ein Arbeitsblatt für Mittelstufenschüler zum Thema *Pflasterungen* (der euklidischen Ebene). Das Arbeitsblatt sollte vier Übungsaufgaben oder praktische Aufgaben (z.B. auch Bastelaufgaben, Experimente, Programmieraufgaben) enthalten sowie jeweils eine kurze Erklärung, welcher mathematische Sachverhalt über Pflasterungen dadurch illustriert wird.



Bitte wenden

Bonusaufgabe (riemannsche Länge vs. metrische Länge)**.** Seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $T_0 < T_1$ und sei $\gamma\colon [T_0, T_1] \longrightarrow H$ eine glatte Kurve. Zeigen Sie, dass

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = L_{(H,d_H)}(\gamma).$$

Hinweis. Die Ungleichung $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \geq L_{(H,d_H)}(\gamma)$ folgt direkt aus der Definition von d_H und der metrischen Länge $L_{(H,d_H)}$.

Die umgekehrte Ungleichung $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \leq L_{(H,d_H)}(\gamma)$ erfordert sehr genaue lokale Abschätzungen (zum Beispiel wie im Beweis der Definitheit von d_H), um die Situation in winzigen Umgebungen mit (skalierten) euklidischen Situationen zu vergleichen. Mit der analytischen Beschreibung der metrischen Länge in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ kann man dann die gewünschte Ungleichung herleiten.

Abgabe bis spätestens 7. Juli 2023, 8:00, via GRIPS.