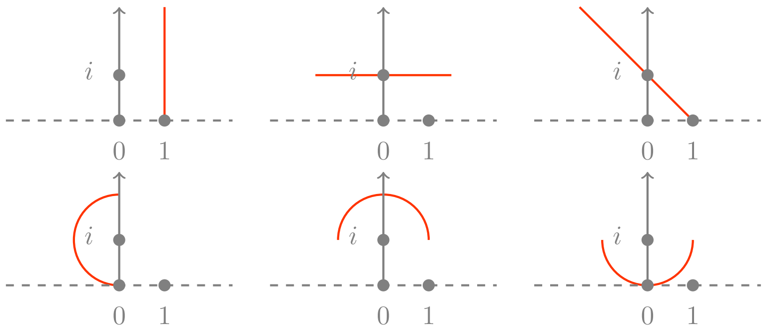
Geometrie: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold Blatt 12, 7. Juli 2023

Fingerübung (hyperbolische Geodäten). Welche der folgenden Bilder im Halbebenenmodell stellen hyperbolische Geodäten dar?



Aufgabe 12.1 (Möbiustransformationen). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt eine Matrix $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit $f_A(i/2023) = i$ und $f_A(i) = 2023 \cdot i$.
2. Es gibt eine Matrix $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit $f_A \circ f_A(i) = 2023 \cdot i$.

Aufgabe 12.2 (Stabilisator von i). Zeigen Sie, dass $\mathrm{Stab}_i = \mathrm{SO}(2)$. Dabei schreiben wir $\mathrm{Stab}_i = \{A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \mid f_A(i) = i\}$ für den Stabilisator von $i \in H$ bezüglich der Möbiustransformationsoperation.

Aufgabe 12.3 (Inversion am Kreis). Wir betrachten die Abbildung (wobei wir H als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen)

$$\begin{aligned} f\colon H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto -\frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Ist K ein verallgemeinerter Halbkreis, so ist auch $f(K)$ ein verallgemeinerter Halbkreis. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!
Hinweis. Da dies Teil des Beweises von Proposition 4.4.17 ist, dürfen Sie natürlich Proposition 4.4.17 *nicht* verwenden.

Aufgabe 12.4 (ein hyperbolisches Dreieck). Zeichnen Sie das geodätische Dreieck in (H, d_H) mit den Ecken $1 + i$, $i - 1$, $2 + 2 \cdot i$. Erklären Sie dabei genau, warum Ihre Zeichnung korrekt ist und wie Sie die entscheidenden Komponenten berechnet/konstruiert haben.

Bonusaufgabe (Sinus/Kosinus Hyperbolicus). Schlagen Sie in der Literatur nach, wie *Sinus/Kosinus Hyperbolicus* definiert sind. Erklären Sie die Definition und die Analogie zum gewöhnlichen Sinus/Kosinus (z.B. Kreis/Hyperbel, Funktional- und Differentialgleichungen) so, dass dies für Oberstufenschüler nachvollziehbar ist.

Abgabe bis spätestens 14. Juli 2023, 8:00, via GRIPS.
Dies ist das letzte reguläre Übungsblatt. Die folgenden Übungsblätter werden als Bonusblätter gewertet.