Geometrie: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold Blatt 13, 14. Juli 2023

Fingerübung (hyperbolische Dreiecke).

1. Skizzieren Sie zwei hyperbolische geodätische Dreiecke, die dieselbe Winkelsumme besitzen, aber nicht kongruent sind.
2. Skizzieren Sie zwei kongruente hyperbolische geodätische Dreiecke, so dass die Punkte des einen alle Imaginärteil kleiner als 1 haben und die Punkte des anderen alle Imaginärteil größer als 1 haben.

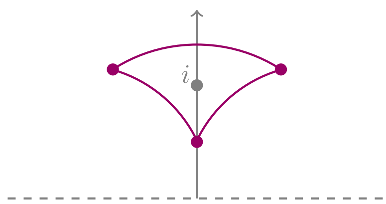
Aufgabe 13.1 (Dreiecke). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt ein geodätisches Dreieck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit den Seitenlängen 1, 2, 4.
2. Es gibt ein geodätisches Dreieck in (H, d_H) mit den Seitenlängen 1, 2, 4.

Aufgabe 13.2 (reguläre hyperbolische Dreiecke). Sei $f\colon H \longrightarrow H$ die Möbiustransformation zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

Zu $y \in (0,1)$ betrachten wir die Punkte $z_0(y) := i \cdot y$ sowie $z_1(y) := f(i \cdot y)$ und $z_2(y) := f^2(i \cdot y)$.



Seien $\alpha_0(y)$, $\alpha_1(y)$, $\alpha_2(y)$ die entsprechenden Winkel des von $z_0(y), z_1(y), z_2(y)$ aufgespannten geodätischen Dreiecks in (H, d_H).

1. Zeigen Sie, dass $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_H$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $d_H(z_0(y), z_1(y)) = d_H(z_1(y), z_2(y)) = d_H(z_2(y), z_0(y))$.
3. Zeigen Sie, dass $\alpha_0(y) = \alpha_1(y) = \alpha_2(y) > 0$.
4. Skizzieren Sie einen Beweis für $\lim_{y\to 0} \alpha_0(y) = 0$.

   Hinweis. Es genügt, wenn Sie die wesentlichen Schritte formulieren und mit geeigneten Skizzen illustrieren; Sie müssen die zugehörigen Berechnungen nicht im Detail ausführen.

Bitte wenden

Aufgabe 13.3 (hyperbolisches Flächenwachstum)**.** Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass

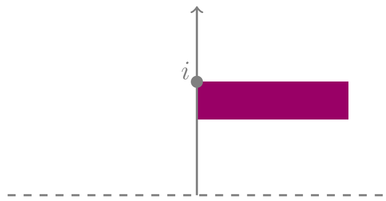
$$\mu_{\mathbb{H}^2}\bigl(B_i^{(H,d_H)}(r)\bigr) \geq \frac{r}{2} \cdot (e^{r/2} - 1),$$

indem Sie wie folgt vorgehen: Sei $Q_r := \bigl\{x + i \cdot y \bigm| x \in [0, r/2],\ y \in [e^{-r/2}, 1]\bigr\}$.

1. Zeigen Sie, dass $Q_r \subset B_i^{(H,d_H)}(r)$ gilt und illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen.

   Hinweis. Warum ist $d_H(i, x+i) \leq r/2$ für alle $x \in [0, r/2]$? Was passiert mit den vertikalen Abständen? Warum hilft das?

2. Zeigen Sie, dass $\mu_{\mathbb{H}^2}(Q_r) = r/2 \cdot (e^{r/2} - 1)$ ist und folgern Sie daraus die Behauptung.



Aufgabe 13.4 (Isometrien sind flächentreu)**.** Sei $A \subset H$ eine messbare Menge und sei $f \in \operatorname{Isom}(H, d_H)$. Zeigen Sie, dass dann auch $f(A)$ messbar ist und, dass

$$\mu_{\mathbb{H}^2}\bigl(f(A)\bigr) = \mu_{\mathbb{H}^2}(A)$$

gilt.

Hinweis. Falls Sie den Begriff „messbar“ noch nicht kennen, können Sie stattdessen auch „offen“ oder „abgeschlossen“ oder „Jordan-messbar“ oder … verwenden.

Sie können die Aussage zunächst für riemannsche Isometrien beweisen oder mit einem konkreten Erzeugendensystem von $\operatorname{Isom}(H, d_H)$ arbeiten.

Bonusaufgabe (Cirkellimiet III)**.** Betrachten Sie den Holzschnitt *Cirkellimiet III* von M.C. Escher:

https://mcescher.com/wp-content/uploads/2019/05/LW-434.jpg

Falls die abgebildeten Vierecke/Dreiecke jeweils kongruente geodätische reguläre hyperbolische Vierecke bzw. Dreiecke (im Poincaré-Scheibenmodell) sind, können dann die weißen Linien hyperbolische geodätische Geraden sein? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis. Winkel?!

Bonusaufgabe (Skript)**.** Finden Sie möglichst viele (Tipp-)Fehler im Skript!

Freiwillige Abgabe bis 21. Juli 2023, 8:00, via GRIPS