Geometrie: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold — Blatt 2, 28. April 2023

Fingerübung (Symmetrie in Spielen?).

1. Gewinnt der erste Spieler sicher bei Tic-Tac-Toe, indem er den ersten Zug in das zentrale Feld setzt und im folgenden die Züge des zweiten Spielers am zentralen Feld punktspiegelt?
2. Gewinnt Schwarz sicher bei Schach, indem es die an der „horizontalen Mittellinie" gespiegelten Züge von Weiß spielt?
3. Bestimmen Sie die Symmetrien des Mühle-Spielbretts.
4. Bestimmen Sie die Symmetrien des Blokus-Trigon-Spielbretts.

Aufgabe 2.1 (Isomorphie und Symmetrie). Seien M und M' die Mini-Geometrie-Modelle zu den Graphen $(\{0,1,2\},\{\{0,1\}\})$ bzw. $(\{0,1,2\},\{\{0,2\}\})$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $M \cong_{\mathsf{MG}} M'$.
2. Die Gruppe $\operatorname{Aut}_{\mathsf{MG}}(M)$ enthält genau ein Element.

Aufgabe 2.2 (kleine Mini-Geometrien). Gibt es an dem folgenden Beweis etwas auszusetzen? Ist die behauptete Aussage überhaupt wahr? Begründen Sie Ihre Antworten!

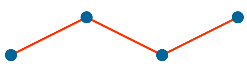
Behauptung. Bis auf Isomorphie von Mini-Geometrien gibt es höchstens ein Mini-Geometrie-Modell $(P,G,\sqsubset)$ mit $|P|=4$ und $|G|=2$.

Beweis. Seien $M=(P,G,\sqsubset)$ und $M'=(P',G',\sqsubset')$ Modelle von Mini-Geometrie mit $|P|=4=|P'|$ und $|G|=2=|G'|$. Dann gibt es also Bijektionen $f\colon P\longrightarrow P'$ und $F\colon G\longrightarrow G'$. Seien $f'\colon P'\longrightarrow P$ und $F'\colon G'\longrightarrow G$ die inversen Bijektionen. Dann sind $(f,F)\colon M\longrightarrow M'$ und $(f',F')\colon M'\longrightarrow M$ zueinander inverse Isomorphismen von Mini-Geometrien. □

Aufgabe 2.3 (Schlange). Wir betrachten die unten schematisch dargestellte Situation mit drei (nicht notwendig verschiedenen) Geraden; eine solche Konstellation ist eine *Schlange*.

1. Definieren Sie die Schlangen-Bedingung in der Sprache der Mini-Geometrie.
2. Wie lautet diese Bedingung in Mini-Geometrie-Modellen? (in Worten)
3. Wie lautet diese Bedingung in Mini-Geometrie-Modellen? (als logische Formel)
4. Wie kann man diese Bedingung in Lean als `is_snake` formalisieren?

   Hinweis. Fügen Sie diese Definition zu minigeometry_exercise.lean hinzu. Probieren Sie auf jeden Fall in Lean aus, ob ihre Implementierung keine Beschwerden von Lean hervorruft.



Bitte wenden

Aufgabe 2.4 (Dreiecksschlange)**.** Sei (x, y, z) ein Dreieck in Mini-Geometrie.

1. Zeigen Sie, dass dann (x, y, z, y) eine Schlange (Aufgabe 2.3) in Mini-Geometrie ist. Illustrieren Sie Ihren Beweis durch eine geeignete Skizze.

2. Vervollständigen Sie den Beweis von `trisnake` in minigeometry_exercise.lean in Lean. Verwenden Sie den Beweis aus der ersten Teilaufgabe als Grundlage und kommentieren Sie Ihren Lean-Code entsprechend.

Bonusaufgabe (Graphen aus Molekülen)**.**

1. Erklären Sie, wie man aus Molekülen Graphen erhalten kann.

   Hinweis. Graphen in unserem Sinne lassen keine Unterscheidungen zwischen verschiedenen Arten von Knoten oder Kanten zu! Das ist also eine sehr grobe Transformation von Molekülen zu Graphen.

2. Geben Sie Beispiele für Isomere, die zu nicht-isomorphen Graphen führen.

Bonusaufgabe (Isomorphie linearer Mini-Geometrien)**.** Sei K ein Körper und seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $A(K^n) \cong_{\mathsf{MG}} A(K^m)$. Zeigen Sie, dass dann $n = m$ gilt.
