Geometrie: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold Blatt 4, 12. Mai 2023

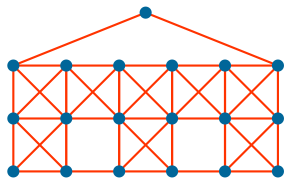
Fingerübung (Metriken). Skizzieren Sie die folgenden Mengen für jede der Metriken $d \in \{d_2, d_1, d_\infty\}$.

1. $\bigl\{x \in \mathbb{R}^2 \bigm| d(x,(0,0)) = 1 \lor d(x,(1,1)) = 1\bigr\}$
2. $\bigl\{x \in \mathbb{R}^2 \bigm| d(x,(0,0)) = 1 \land d(x,(1,1)) = 1\bigr\}$
3. $\bigl\{x \in \mathbb{R}^2 \bigm| d(x,(0,0)) < 1 \lor d(x,(1,1)) = 2\bigr\}$
4. $\bigl\{x \in \mathbb{R}^2 \bigm| d(x,(0,0)) < 1 \land d(x,(1,1)) = 2\bigr\}$

Aufgabe 4.1 (Metriken und Vollständigkeit). Sei $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. Für alle $x, y \in \{1, \dots, n\}$ gilt $d_{K_n}(x,y) \leq 1$.
2. Sei X ein Graph mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$ und der folgenden Eigenschaft, dass für alle $x, y \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $d_X(x,y) \leq 1$. Dann ist $X = K_n$.

Aufgabe 4.2 (Walhalla). Die untenstehenden Skizze eines Graphen spezifiziert, wieviele Knoten es gibt und welche Knoten durch Kanten verbunden sind. Ist dieser Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort!



Hinweis. Man kann die Lösung „sehen"! (Und dann formal begründen …)

Aufgabe 4.3 (Sechsfarbensatz). Beweisen Sie den Sechsfarbensatz: Für jeden endlichen (zusammenhängenden) planaren Graphen (V, E) gibt es eine Abbildung $c \colon V \longrightarrow \{1, \dots, 6\}$ mit

$$\forall_{\{v,w\} \in E} \quad c(v) \neq c(w).$$

Hinweis. Behandeln Sie induktiv Knoten von niedrigem Grad.

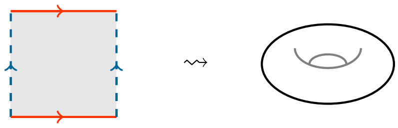
Bitte wenden

Aufgabe 4.4 (Quintrix)**.** König Quintrix herrscht über ein Reich, bestehend aus fünf zusammenhängenden Provinzen, wobei je zwei dieser Provinzen eine gemeinsame Grenze positiver Länge besitzen. Begründen Sie Ihre Antworten!

1. Könnte sich ein solches Reich auf der Oberfläche eines kugelförmigen Planeten befinden? Oder auf einer Scheibe?

2. Könnte sich ein solches Reich auf der Oberfläche eine Torus-Planeten befinden?

Hinweis. Den Torus erhält man durch folgende Verklebung der Seiten eines Quadrats; es kann hilfreich sein, Skizzen in dieser Quadratansicht zu erstellen.



Bonusaufgabe (Einbettbarkeit in $\mathbb{R}^3$)**.** Zeigen Sie, dass jeder endliche Graph in $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden kann, indem Sie wie folgt vorgehen: Sei

$$\begin{aligned} \mu\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (t, t^2, t^3) \end{aligned}$$

die sogenannte *Momentenkurve*.

1. Skizzieren Sie die Momentenkurve in $\mathbb{R}^3$.

2. Seien $t_1, \dots, t_4 \in \mathbb{R}$ und sei $M(t_1, \dots, t_4) := ({t_j}^{k-1})_{j,k \in \{1,\dots,4\}}$ (eine reelle 4×4-Matrix). Zeigen Sie: Sind die vier Zahlen $t_1, \dots, t_4$ alle verschieden, so ist $\det M(t_1, \dots, t_4) \neq 0$.

3. Schließen Sie daraus: Sind $t_1, \dots, t_4 \in \mathbb{R}$ vier verschiedene Zahlen, so liegen die Punkte $\mu(t_1), \dots, \mu(t_4)$ *nicht* in einer gemeinsamen Ebene in $\mathbb{R}^3$.

4. Folgern Sie: Indem man die Knoten auf die Momentenkurve abbildet und diese Punkte dann durch den Kanten entsprechenden Strecken verbindet, erhält man für jeden endlichen Graphen eine Einbettung nach $\mathbb{R}^3$.

Abgabe bis spätestens 19. Mai 2023, 8:00, via GRIPS.