Geometrie: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold Blatt 5, 19. Mai 2023

Fingerübung (Isometrien der Ebene). Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Rotation um $\pi/4$ um den Ursprung; sei $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Translation um $(2023, 1)$. Bezüglich welcher der folgenden Metriken d auf $\mathbb{R}^2$ sind f bzw. g Isometrien in $\operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d)$?

1. d_2
2. d_1
3. d_∞
4. $2023 \cdot d_2$

Aufgabe 5.1 (Kollisionsabfrage). Ein typisches Problem bei der Implementierung von Computerspielen ist, zu entscheiden, ob sich zwei Objekte (z.B. der Spielercharakter und giftige Brühe) überschneiden oder nicht. Wir betrachten zwei quadratische Objekte. Seien $x, x' \in \mathbb{R}^2$ und

$$Q := [x_1 - 1, x_1 + 1] \times [x_2 - 1, x_2 + 1],\ Q' := [x'_1 - 1, x'_1 + 1] \times [x'_2 - 1, x'_2 + 1] \subset \mathbb{R}^2.$$

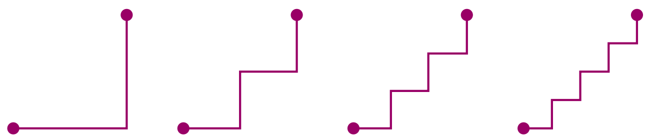
Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. Es gilt $Q \cap Q' \neq \emptyset$, wenn $d_\infty(x, x') \leq 2$.
2. Wenn $Q \cap Q' \neq \emptyset$ ist, so folgt $d_2(x, x') \leq \sqrt{2} \cdot 2$.

Aufgabe 5.2 (Statuen). Zeigen Sie: Auf einem quadratischen Platz der Kantenlänge 20 Meter ist es *nicht* möglich, fünf Statuen so aufzustellen, dass sie alle voneinander mindestens den Abstand von 15 Metern haben.
Hinweis. Die Statuen stehen auf dem (ebenen) Boden. Wenden Sie das Schubfachprinzip auf geeignete vier Schubladen an! Vergessen Sie nicht, die „offensichtlichen" Dinge auch zu beweisen.

Aufgabe 5.3 (Lochebene). Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ *nicht* geodätisch ist!
Hinweis. Achten Sie darauf, dass Ihr Argument nicht nur anschaulich plausibel, sondern wirklich wasserdicht ist. Setzen Sie einen Widerspruchsbeweis an und überlegen Sie sorgfältig, wie man Information zwischen $(\mathbb{R}^2, d_2)$ und $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ hin- und herschieben kann.

Aufgabe 5.4 ($\sqrt{2} = 2$?!). Was ist falsch am „Beweis" in Beispiel 2.3.6? Erklären Sie genau, worin der Fehler besteht und welche Schritte korrekt sind.
Bonusaufgabe. Wie könnte man Schülern erklären, was im „Beweis" schiefgeht?



Bonusaufgabe (Alpha-Max-Beta-Min).

1. Was ist das Alpha-Max-Beta-Min-Verfahren?
2. Wozu/Warum wird es verwendet?

Hinweis. Quellenangaben nicht vergessen!

Abgabe bis spätestens 26. Mai 2023, 8:00, via GRIPS.