

Geometrie: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold

Blatt 6, 26. Mai 2023

Fingerübung (Konstruierbarkeit). Sei $M := \{(0, 0), (1, 0)\}$. Wie kann man die folgenden Konstruktionsprobleme mit Zirkel und Lineal, ausgehend von M , lösen? Warum sind die Konstruktionen durchführbar und warum liefern sie das korrekte Ergebnis?

1. Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1.
2. Konstruktion einer Raute mit Seitenlänge 1.
3. Konstruktion von $(1/2, \sqrt{3})$.
4. Konstruktion von $(0, 1)$.
5. Konstruktion von $(1/4, 0)$.
6. Konstruktion von $(1/3, 0)$.

Hinweis. Diese Konstruktion benötigt eine Tatsache, die Sie vielleicht schon sehr lange nicht mehr in dieser Form verwendet haben.

Aufgabe 6.1 (Taxi-Kongruenzsätze). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. In (\mathbb{R}^2, d_1) sind Sphären von gleichem Radius kongruent: Ist $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und sind $x, x' \in \mathbb{R}^2$, so sind die Sphären $S_x^{(\mathbb{R}^2, d_1)}(r)$ und $S_{x'}^{(\mathbb{R}^2, d_1)}(r)$ in (\mathbb{R}^2, d_1) kongruent.
2. In (\mathbb{R}^2, d_1) gilt der Kongruenzsatz SSS: Sind $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ und $(\gamma'_0, \gamma'_1, \gamma'_2)$ geodätische Dreiecke in (\mathbb{R}^2, d_1) und gilt

$$L(\gamma_0) = L(\gamma'_0), \quad L(\gamma_1) = L(\gamma'_1), \quad L(\gamma_2) = L(\gamma'_2),$$

so sind die die Mengen $\text{im } \gamma_0 \cup \text{im } \gamma_1 \cup \text{im } \gamma_2$ und $\text{im } \gamma'_0 \cup \text{im } \gamma'_1 \cup \text{im } \gamma'_2$ in (\mathbb{R}^2, d_1) kongruent.

Aufgabe 6.2 (goldenes Schnittchen). Konstruieren Sie in (\mathbb{R}^2, d_2) zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit

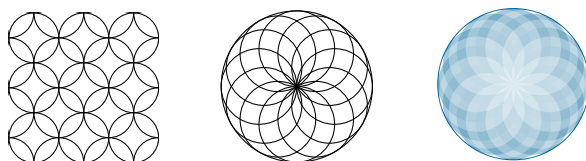
$$d_2(x, y) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

mit Zirkel und Lineal aus der Menge $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$. Beschreiben Sie die Konstruktion und beweisen Sie Durchführbarkeit und Korrektheit.

Bitte wenden

Aufgabe 6.3 (Kreise in \LaTeX).

1. Vervollständigen Sie `circles_exercise.tex` so, dass Sie ein Muster wie in der linken Abbildung erhalten.
2. Vervollständigen Sie `circlecircles_exercise.tex` so, dass Sie ein Muster wie in der mittleren Abbildung erhalten.
3. *Bonusaufgabe.* Seien Sie kreativ! Modifizieren Sie das Programm aus der zweiten Teilaufgabe so, dass Sie die rechte Abbildung o. ä. erhalten.



Hinweis. Wenn Sie keine eigene \LaTeX -Installation haben, können Sie den Quellcode unter <https://latex.informatik.uni-halle.de/latex-online/latex.php> übersetzen. Die Vorlagen sind so gestaltet, dass die Aufgaben auch ohne Vorkenntnisse in \LaTeX lösbar sind. Dokumentieren Sie Ihren Quellcode!

Aufgabe 6.4 (Polyduell). In der euklidischen Ebene (\mathbb{R}^2, d_2) treffen sich 2023 Personen zu einem Polyduell. Gemäß alter Tradition stellen sie sich so auf, dass die Abstände zwischen je zwei Personen alle verschieden sind. Pünktlich zum offiziellen Startsignal erschießt jeder gleichzeitig denjenigen, der ihm am nächsten ist (bezüglich d_2).

1. Zeigen Sie, dass mindestens einer der Teilnehmer überlebt.

Hinweis. Extremalprinzip!

2. Zeigen Sie, dass sich die (geradlinigen!) Flugbahnen zweier Kugeln *nicht* schneiden können.

Bonusaufgabe (Konstruierbarkeit und Kongruenz in Schulbüchern). Wie werden die folgenden Themen in Schulbüchern behandelt? Gehen Sie insbesondere darauf ein, ob Definitionen gegeben werden (und wie diese gegebenenfalls aussehen) und ob/welche Schritte bewiesen werden.

1. Konstruktion des Mittelpunkts einer Strecke mit Zirkel und Lineal
2. Kongruenz von geometrischen Objekten

Hinweis. Es genügt, wenn Sie jeweils ein passendes Schulbuch auswählen. Quellenangaben nicht vergessen!