Geometrie: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold | Blatt 7, 2. Juni 2023

Fingerübung (Auffrischung). Wiederholen Sie die folgenden Themen aus Lineare Algebra I/II bzw. Analysis I/II:

1. Normen, Skalarprodukte, Bilinearformen (und Klassifikationsresultate).
2. Die Gruppen $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.
3. Differenzierbarkeit von Abbildungen $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$.
4. Wir werden das nicht benötigen, aber es gehört zum mathematischen Allgemeinwissen: An welcher Stelle sind in der mehrdimensionalen Analysis symmetrische Bilinearformen und ihre Definitheitseigenschaften wichtig?

Aufgabe 7.1 (Orthogonalität). Sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

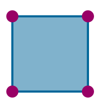
1. Sind $x, y, z \in V$ mit $x \perp y$ und $x \perp z$, so folgt $y \perp z$.
2. Sind $x, y, z \in V$ mit $x \perp y$ und $x \perp z$, so folgt $x \perp (y - z)$.

Aufgabe 7.2 (Isometriegruppe von Quadraten). Sei $X := [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Wir versehen X mit der euklidischen Metrik d_2 auf $\mathbb{R}^2$.

1. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Isom}(X, d_2)$ genau acht Elemente enthält und beschreiben Sie diese Elemente.

   Hinweis. Zeigen Sie zunächst mithilfe des Extremalprinzips, dass Isometrien von (X, d_2) die Ecken des Quadrats auf Ecken abbilden.

2. Ist $\operatorname{Isom}(X, d_2)$ zu einer der Gruppen $\mathbb{Z}/8$ oder $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$ isomorph? Begründen Sie Ihre Antwort!



Aufgabe 7.3 (Polarisierung und Cauchy-Schwarz in Lean). Suchen Sie in der mathlib von Lean die folgenden Sachverhalte über Skalarprodukte:

1. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung,
2. die Polarisierungsgleichung.

Geben Sie jeweils den genauen Namen und die Typ-Signatur der Theoreme an und geben Sie die Module an, in denen sich die Theoreme befinden. Warum gibt es jeweils mehrere Theoreme, die sich damit befassen?

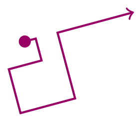
Bitte wenden

Aufgabe 7.4 (Perpendikulus). Der Roboter Perpendikulus lebt in der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, d_2)$; aufgrund seines ausgeprägten Orthogonalitätsbewusstseins bewegt er sich auf Perpendikulus-Routen fort:

Eine *Perpendikulus-Route* aus $n \in \mathbb{N}$ Segmenten ist eine Folge $(s_1, \dots, s_n)$ von n geraden Segmenten (d.h. euklidischen Geodäten) in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit folgenden Eigenschaften: Ist $j \in \{1, \dots, n\}$, so hat s_j die Länge j, das Segment s_j endet am Anfang von s_{j+1} und s_{j+1} ist orthogonal zu s_j; dabei verstehen wir s_{n+1} als s_1 (insbesondere ist die Route geschlossen). Wir nennen $n \in \mathbb{N}$ eine *Perpendikulus-Zahl*, wenn es eine Perpendikulus-Route mit n Segmenten gibt.

1. Zeigen Sie, dass 8 eine Perpendikulus-Zahl ist.
2. Zeigen Sie, dass jedes Vielfache von 8 eine Perpendikulus-Zahl ist.
3. Warum sind 7, 10 und 12 *keine* Perpendikulus-Zahlen?
4. Zeigen Sie, dass jede Perpendikulus-Zahl durch 8 teilbar ist.

Hinweis. Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem. Überlegen Sie sich dann, wie Sie den Kern des Problems durch zwei Gleichungen beschreiben können. Illustrieren Sie Ihre Argumente mit geeigneten Skizzen!



Bonusaufgabe (Lehrplan). Finden Sie online den Lehrplan Mathematik für Gymnasien in Bayern und beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Wie oft treten die Wörter „Beweis“ und „Definition“ im Lehrplan auf?
2. Welche Schlüsse ziehen Sie daraus für die Zukunft des Fachs „Mathematik“ an Gymnasien?

Hinweis. Ceterum censeo … Quellenangaben!

Abgabe bis spätestens 9. Juni 2023, 8:00, via GRIPS.