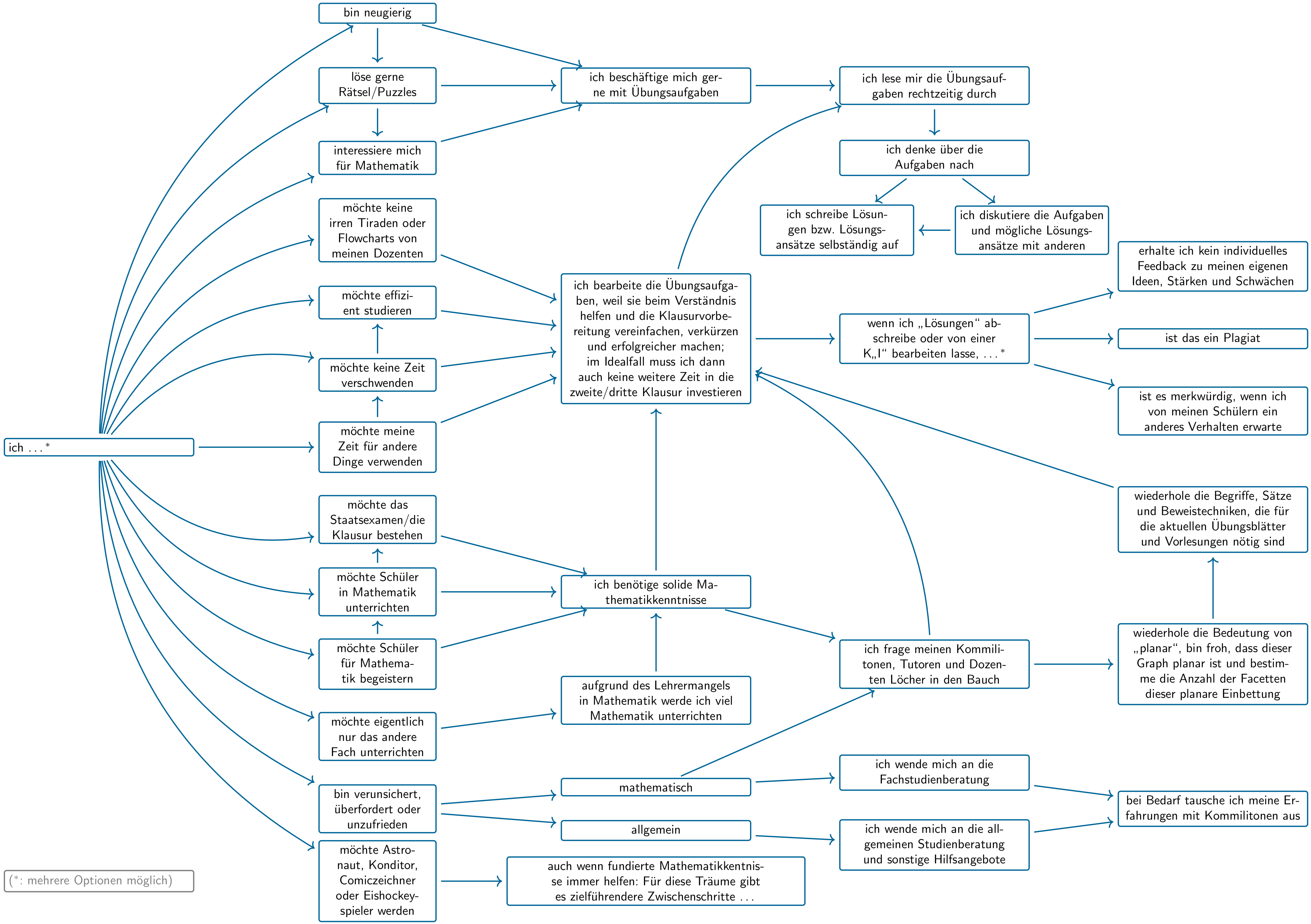
ich . . . *
bin neugierig
löse gerne Rätsel/Puzzles
interessiere mich für Mathematik
möchte keine irren Tiraden oder Flowcharts von meinen Dozenten
möchte effizient studieren
möchte keine Zeit verschwenden
möchte meine Zeit für andere Dinge verwenden
möchte das Staatsexamen/die Klausur bestehen
möchte Schüler in Mathematik unterrichten
möchte Schüler für Mathematik begeistern
möchte eigentlich nur das andere Fach unterrichten
bin verunsichert, überfordert oder unzufrieden
möchte Astronaut, Konditor, Comiczeichner oder Eishockeyspieler werden
ich beschäftige mich gerne mit Übungsaufgaben
ich bearbeite die Übungsaufgaben, weil sie beim Verständnis helfen und die Klausurvorbereitung vereinfachen, verkürzen und erfolgreicher machen; im Idealfall muss ich dann auch keine weitere Zeit in die zweite/dritte Klausur investieren
ich benötige solide Mathematikkenntnisse
aufgrund des Lehrermangels in Mathematik werde ich viel Mathematik unterrichten
mathematisch
allgemein
auch wenn fundierte Mathematikkentnisse immer helfen: Für diese Träume gibt es zielführendere Zwischenschritte . . .
ich lese mir die Übungsaufgaben rechtzeitig durch
ich denke über die Aufgaben nach
ich schreibe Lösungen bzw. Lösungsansätze selbständig auf
ich diskutiere die Aufgaben und mögliche Lösungsansätze mit anderen
wenn ich „Lösungen“ abschreibe oder von einer K„I“ bearbeiten lasse, . . . *
erhalte ich kein individuelles Feedback zu meinen eigenen Ideen, Stärken und Schwächen
ist das ein Plagiat
ist es merkwürdig, wenn ich von meinen Schülern ein anderes Verhalten erwarte
wiederhole die Begriffe, Sätze und Beweistechniken, die für die aktuellen Übungsblätter und Vorlesungen nötig sind
ich frage meinen Kommilitonen, Tutoren und Dozenten Löcher in den Bauch
wiederhole die Bedeutung von „planar“, bin froh, dass dieser Graph planar ist und bestimme die Anzahl der Facetten dieser planare Einbettung
ich wende mich an die Fachstudienberatung
ich wende mich an die allgemeinen Studienberatung und sonstige Hilfsangebote
bei Bedarf tausche ich meine Erfahrungen mit Kommilitonen aus
(*: mehrere Optionen möglich)

Geometrie: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold Blatt 8, 9. Juni 2023

Fingerübung (Krümmung von Kurven). Skizzieren Sie die untenstehenden Kurven $[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ (mit dem Standardskalarprodukt) und bestimmen Sie die Krümmung. Welche Länge haben diese Kurven?

1. $t \longmapsto (t, 0)$
2. $t \longmapsto 1/\sqrt{2} \cdot (t, t)$
3. $t \longmapsto \begin{cases} (\sin t, \cos t) & \text{falls } t \geq 0 \\ (\sin t, 2 - \cos t) & \text{falls } t < 0 \end{cases}$

Aufgabe 8.1 (gleiche Krümmung). Seien $\gamma_1, \gamma_2 \colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisierte zweimal stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist $\dot\gamma_1(0) = \dot\gamma_2(0)$ und $\|\kappa_{\gamma_1}(t)\|_2 = \|\kappa_{\gamma_2}(t)\|_2$ für alle $t \in (-1,1)$, so folgt $\gamma_1 = \gamma_2$.
2. Ist $\kappa_{\gamma_1}(t) = \kappa_{\gamma_2}(t)$ für alle $t \in (-1,1)$, so folgt $\gamma_1 = \gamma_2$.

Aufgabe 8.2 (Abstand zu einer Geraden). Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit induzierter Metrik d, sei $x \in V$ und sei g eine affine Gerade in V. Zeigen Sie: Ist $y \in g$, so gilt genau dann $d(x, g) = d(x, y)$, wenn

$$y - x \perp g.$$

Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Aufgabe 8.3 (doppeltes Kürvchen). Geben Sie ein Beispiel für zwei stetig differenzierbare Kurven $\gamma_2,\ \gamma_1 \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die simultan die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- Es gilt $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$.
- Es gilt $L(\gamma_1) = 2023 = L(\gamma_2)$ bezüglich der euklidischen Metrik.
- Die Mengen $\gamma_1([0,1])$ und $\gamma_2([0,1])$ sind als Teilmengen von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *nicht* kongruent.

Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 8.4 (Kurven-Energie). Sei $(V, \| \cdot \|)$ ein Banachraum, seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$ mit $T_0 < T_1$ und sei $\gamma \colon [T_0, T_1] \longrightarrow V$ stetig differenzierbar. Dann definieren wir die *Energie von* γ durch

$$E(\gamma) := \frac{1}{2} \cdot \int_{T_0}^{T_1} \|\dot\gamma(t)\|^2 \, dt.$$

Zeigen Sie, dass $L(\gamma)^2 \leq 2 \cdot (T_1 - T_0) \cdot E(\gamma)$ und dass Gleichheit genau dann vorliegt, wenn die Funktion $\|\dot\gamma\|$ konstant ist.
Hinweis. Verwenden Sie die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung für ein Skalarprodukt auf einem geeigneten Funktionenraum.
Bonusaufgabe. Was bedeutet das in der Praxis? (Z.B. beim Autofahren …)

Bonusaufgabe (Länge von Kurven, poetisch).

Wenn wir nach der Länge von Kurven begieren,
genügt es, die Norm des Differentials zu integrieren.
Formulieren wir Satz und Beweis als Gedicht,
so vergessen wir sie nicht!

Abgabe bis spätestens 16. Juni 2023, 8:00, via GRIPS.