Geometrie: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold Blatt 9, 16. Juni 2023

Fingerübung (euklidische Isometrien). Welche der folgenden Matrizen beschreiben (bezüglich der Standardbasis auf $\mathbb{R}^2$) euklidische Isometrien $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$? Skizzieren Sie die Abbildungen!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.1 (Spieglein, Spieglein, Spieglein, ...). Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x + (2023, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

die Translation um $(2023, 0, \dots, 0)$. Wir betrachten Spiegelungen an affinen Hyperebenen bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Man kann f in eine Komposition von genau 2022 Spiegelungen zerlegen.
2. Man kann f in eine Komposition von genau 2023 Spiegelungen zerlegen.

   Hinweis. „Determinante!“ sagte die Tante, die alle Invarianten kannte.

Aufgabe 9.2 (gleiche Winkel). Geben Sie ein Beispiel für einen Winkel $\alpha \in (0, \pi)$ und für Vektoren $v_0, \dots, v_4 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\forall_{j,k \in \{1,\dots,4\}} \quad j \neq k \Longrightarrow \sphericalangle(v_j - v_0, v_k - v_0) = \alpha.$$

Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis. Wer wenig rechnen möchte, kann mit einem Würfel beginnen ...

Bonusaufgabe. Was hat das mit Methan zu tun?

Aufgabe 9.3 (kleine Dreiecke). Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Wir betrachten

$$\Delta(x, y, z) := \bigl\{ t_x \cdot x + t_y \cdot y + t_z \cdot z \bigm| t_x, t_y, t_z \in [0, 1], t_x + t_y + t_z = 1 \bigr\} \subset \mathbb{R}^2$$

und nehmen an, dass $\Delta(x, y, z)$ außer x, y, z keine weiteren Punkte aus $\mathbb{Z}^2$ enthält. Zeigen Sie, dass

$$\bigl|\det(y - x, z - x)\bigr| = 1.$$

Hinweis. Warum ist $(y - x, z - x)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}^2$?

Bitte wenden

Aufgabe 9.4 (Isometrien aus Spiegelungen).

1. Zu $\alpha \in [0, 2 \cdot \pi]$ sei

$$\begin{aligned} R_\alpha \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot x. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass man R_α als Komposition von Spiegelungen in $\mathbb{R}^2$ (bzgl. des Standardskalarprodukts) schreiben kann. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jedes Element aus $\operatorname{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$ als Komposition von endlich vielen Spiegelungen in $\mathbb{R}^n$ (bzgl. des Standardskalarprodukts) geschrieben werden kann.

   Hinweis. Welche Normalformen/Spektralsätze für orthogonale Matrizen kennen Sie aus der Linearen Algebra?

Bonusaufgabe (Loch Ocht). Der schottische See Loch Ocht ist kreisförmig mit einem Radius von einer Meile. Aufgrund des dichten Nebels ist überhaupt nur erkennbar, was weniger als eine Meile entfernt ist. In diesem See leben acht Ungeheuer (sogenannte Ochties), die ihren Hals und Kopf, ihrem großen Vorbild Nessie nacheifernd, aus dem See recken. Zeigen Sie, dass es dann zwei Ochties gibt, die sich sehen können.
Hinweis. Extremalprinzip!

Abgabe bis spätestens 23. Juni 2023, 8:00, via GRIPS.