Klausur zur Geometrie (Lehramt Gymnasium)

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold 24. Juli 2023

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 4 = 10 Punkte). Die Sprache von *Bigon-Geometrie* enthält *Punkte*, *Bigone* und die Beziehung *„ist Ecke von“* zwischen Punkten und Bigonen sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Bigon-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

B 1 Zu jedem Bigon gibt es genau zwei verschiedene Punkte, die Ecken von diesem Bigon sind.

B 2 Zu je zwei verschiedenen Bigonen gibt es genau einen Punkt, der eine Ecke von beiden Bigonen ist.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie für Bigon-Geometrie: Es gibt *keine* Bigon-Geometrie mit genau vier verschiedenen Bigonen und genau drei verschiedenen Punkten.
2. Erfinden Sie eine (sinnvolle) Definition dafür, was ein *Modell* für Bigon-Geometrie ist.
3. Ist der folgende Satz unabhängig von den Bigon-Geometrie-Axiomen?

   > Zu je drei verschiedenen Bigonen gibt es einen Punkt, der eine gemeinsame Ecke dieser drei Bigone ist.

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 ($3 + 2 + 4 + 1 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den eulerschen Polyedersatz.
2. Wie sind Facetten in diesem Kontext definiert?
3. Skizzieren Sie einen Beweis für die Nicht-Planarität von K_5 (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen).
4. Worauf wird der eulersche Polyedersatz bei der Klassifikation regulärer Polyeder angewendet?

Aufgabe 3 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte).

1. Berechnen Sie in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ die Länge von

$$\begin{aligned}[0,2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \big(\cos(-2 \cdot t), \sin(2 \cdot t)\big)\end{aligned}$$

   und begründen Sie Ihre Rechenschritte.

2. Gibt es in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ (Achung: d_1, nicht d_2 !) ein geodätisches Dreieck mit den Seitenlängen $4, 2, 1$?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Gibt es eine Isometrie $(\mathbb{R}^2, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_1)$?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 ($4 + 1 + 5 = 10$ Punkte)**.**

1. Geben Sie zwei Spiegelungen $s_1, s_2 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ an affinen Geraden an, so dass die Komposition $f := s_2 \circ s_1$ folgendes erfüllt:

   $$f(0,0) = (0,1) \quad \text{und} \quad f(1,0) = (1,1).$$

   Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $A, B \subset X$. Wann heißen A und B in (X, d) *kongruent*?

3. Warum gilt in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ im allgemeinen *kein* „Kongruenzsatz SSW“ ?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5 ($2 + 4 + 4 = 10$ Punkte)**.**

1. Sei $A := [-2, 2] \times [1, \infty) \subset H$. Zeigen Sie, dass $\mu_{\mathbb{H}^2}(A) = 4$ gilt.

   Begründen Sie Ihre Rechenschritte!

2. Gibt es ein geodätisches Dreieck Δ in (H, d_H) mit $\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \mu_{\mathbb{H}^2}(A)$?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ und $V \subset H$ nicht-leer und offen. Skizzieren Sie einen Beweis dafür, dass (U, d_2) und (V, d_H) *nicht* isometrisch sind (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen).

Aufgabe 6 ($4 + 2 + 4 = 10$ Punkte).

1. Geben Sie ein Beispiel für eine Möbiustransformation $f\colon H \longrightarrow H$, die $f \circ f(i) = i + 2023$ erfüllt.

   Begründen Sie Ihre Antwort und beschreiben Sie f geometrisch!

2. Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, so dass $f_A(i) = i$ für die assoziierte Möbiustransformation f_A gilt.

3. Folgern Sie: Ist $z \in H$, so gibt es unendlich viele $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, so dass $f_A(z) = z$ gilt