Klausur zur Geometrie (Lehramt Gymnasium)

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold 24. Juli 2023

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 4 = 10 Punkte). Die Sprache von *Bigon-Geometrie* enthält *Punkte*, *Bigone* und die Beziehung *„ist Ecke von"* zwischen Punkten und Bigonen sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Bigon-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

B 1 Zu jedem Bigon gibt es genau zwei verschiedene Punkte, die Ecken von diesem Bigon sind.

B 2 Zu je zwei verschiedenen Bigonen gibt es genau einen Punkt, der eine Ecke von beiden Bigonen ist.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie für Bigon-Geometrie: Es gibt *keine* Bigon-Geometrie mit genau vier verschiedenen Bigonen und genau drei verschiedenen Punkten.

2. Erfinden Sie eine (sinnvolle) Definition dafür, was ein *Modell* für Bigon-Geometrie ist.

3. Ist der folgende Satz unabhängig von den Bigon-Geometrie-Axiomen?

   > Zu je drei verschiedenen Bigonen gibt es einen Punkt, der eine gemeinsame Ecke dieser drei Bigone ist.

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. *Angenommen*, es gäbe eine Bigon-Geometrie mit genau vier verschiedenen Bigonen und genau drei verschiedenen Punkten. Es gibt genau drei Möglichkeiten, aus den drei verschiedenen Punkten zwei verschiedene auszuwählen. Nach B 1 und dem Schubfachprinzip gibt es also zwei verschiedene Bigone, die zwei verschiedene gemeinsame Ecken haben. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu B 2.

2. Ein *Modell für Bigon-Geometrie* ist ein Tripel $(P, B, \sqsubset)$, bestehend aus einer Menge P, einer Menge B und einer Relation „ $\sqsubset$ " $\subset P \times B$, mit folgenden Eigenschaften:

   - Ist $X \in B$, so gibt es genau zwei verschiedene $x \in P$ mit $x \sqsubset X$.

- Sind $X, Y \in B$ mit $X \neq Y$, so gibt es genau ein $x \in P$ mit $x \sqsubset X$ und $x \sqsubset Y$.

[Wenn man Modelle für Bion-Geometrie als Tripel $(P, B, \in)$ definieren möchte, wobei P eine Menge und B eine Menge zweielementiger Teilmengen von P mit

$$\forall_{X,Y \in B} \quad |X \cap Y| = 1$$

ist, so muss man (ähnlich zu dem Argument im ersten Aufgabenteil) zeigen, dass Bigone durch ihre beiden Ecken bereits eindeutig bestimmt sind.]

3. Ja, dieser Satz ist unabhängig von den Kreis-Geometrie-Axiomen, denn:

   - In dem Modell $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ ist der Satz erfüllt.
   - In dem Modell $(\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}, \in)$ ist der Satz *nicht* erfüllt.

Aufgabe 2 (3 + 2 + 4 + 1 = 10 Punkte).

1. Formulieren Sie den eulerschen Polyedersatz.
2. Wie sind Facetten in diesem Kontext definiert?
3. Skizzieren Sie einen Beweis für die Nicht-Planarität von K_5 (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen).
4. Worauf wird der eulersche Polyedersatz bei der Klassifikation regulärer Polyeder angewendet?

Lösung:

1. Sei $X = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender planarer Graph mit $V \neq \emptyset$ und sei $f\colon X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung mit genau F Facetten. Dann gilt
$$|V| - |E| + F = 2.$$
Insbesondere ist die Anzahl der Facetten unabhängig von der gewählten planaren Einbettung.

2. Sei $f\colon X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung eines endlichen planaren Graphen X. Die Wegzusammenhangskomponenten des Komplements $\mathbb{R}^2 \setminus f(X_{\mathbb{R}})$ heißen *Facetten der Einbettung* f.

3. Aus dem eulerschen Polyedersatz folgt (da in einer planaren Einbettung jede Facette von mindestens drei Kanten begrenzt wird und jede Kante zu höchstens zwei Facetten gehört):

   Ist (V, E) ein endlicher zusammenhängender planarer Graph mit $|V| \geq 3$, so gilt
$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6.$$
   Angenommen, K_5 wäre planar. Nach der obigen Folgerung gilt dann (da K_5 genau fünf Knoten und zehn Kanten hat)
$$10 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9,$$
   was nicht sein kann. Also ist K_5 *nicht* planar.

4. Sei P ein regulärer Polyeder. Man wendet den eulerschen Polyedersatz dann auf den Graphen an, dessen Knoten die Ecken von P sind und dessen Kanten genau die Eckenmengen von geometrischen Kanten von P sind.

Aufgabe 3 ($2 + 4 + 4 = 10$ Punkte).

1. Berechnen Sie in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ die Länge von

$$\begin{aligned} [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \big(\cos(-2 \cdot t), \sin(2 \cdot t)\big) \end{aligned}$$

   und begründen Sie Ihre Rechenschritte.

2. Gibt es in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ (Achung: d_1, nicht d_2 !) ein geodätisches Dreieck mit den Seitenlängen $4, 2, 1$?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Gibt es eine Isometrie $(\mathbb{R}^2, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_1)$?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Sei γ die gegebene Kurve. Dann ist γ stetig differenzierbar. Mit der analytischen Beschreibung der Länge von Kurven folgt somit, dass

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^2 \big\|\dot\gamma(t)\big\|_2 \, dt \\ &= \int_0^2 \big\|(2 \cdot \sin(-2 \cdot t), 2 \cdot \cos(2 \cdot t))\big\|_2 \, dt = \int_0^2 2 \cdot \big\|(\sin(-2 \cdot t), \cos(-2 \cdot t))\big\|_2 \, dt \\ &= \int_0^2 2 \cdot 1 \cdot t \, dt = 2 \cdot t \,\Big|_{t=0}^{t=2} = 4. \end{aligned}$$

2. Nein, denn: *Angenommen* es gäbe eine solches geodätisches Dreieck Δ. Seien x_0, x_1, x_2 die Ecken von Δ. Die Seitenlängen sind dann $d_1(x_0, x_1)$, $d_1(x_1, x_2)$ und $d_1(x_0, x_2)$, da die Länge von Geodäten mit dem Abstand der Endpunkte übereinstimmt. Ohne Einschränkung sei $d_1(x_0, x_1) = 1$, $d_1(x_1, x_2) = 2$ und $d_1(x_0, x_2) = 4$ (ansonsten numerieren wir die Ecken entsprechend um). Mit der Dreiecksungleichung folgt dann,

$$4 = d_1(x_0, x_2) \le d_1(x_0, x_1) + d_1(x_1, x_2) \le 1 + 2 = 3,$$

   was nicht sein kann. Also gibt es kein solches geodätisches Dreieck.

3. Nein, denn: *Angenommen*, es gäbe eine solche Isometrie $f \colon (\mathbb{R}^2, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_1)$. Seien $x := f^{-1}(0,0)$, $y := f^{-1}(1,1)$. Dann induziert f eine Bijektion zwischen der Menge der Geodäten in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ von x nach y und der Menge der Geodäten in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ von $(0,0)$ nach $(1,1)$.

   In $(\mathbb{R}^2, d_2)$ gibt es zu je zwei Punkten nur genau eine Geodäte, die diese Punkte verbindet. In $(\mathbb{R}^2, d_1)$ gibt es jedoch mehrere Geodäten, von $(0,0)$ nach $(1,1)$. Also kann es keine solche Isometrie geben.

   [Es gibt hier viele Lösungsmöglichkeiten. Alternativ könnte man z.B. auch damit argumentieren, dass $(\mathbb{R}^2, d_1)$ die Polarisierungsgleichung *nicht* erfüllt.]

Aufgabe 4 (4 + 1 + 5 = 10 Punkte).

1. Geben Sie zwei Spiegelungen $s_1, s_2 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ an affinen Geraden an, so dass die Komposition $f := s_2 \circ s_1$ folgendes erfüllt:
$$f(0,0) = (0,1) \quad \text{und} \quad f(1,0) = (1,1).$$
Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $A, B \subset X$. Wann heißen A und B in (X, d) *kongruent*?

3. Warum gilt in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ im allgemeinen *kein* „Kongruenzsatz SSW“ ? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Wir verwenden die Spiegelung s_1 an der affinen Geraden $\mathbb{R} \cdot (1,0) + (0,1/4)$ und die Spiegelung s_2 an der affinen Geraden $\mathbb{R} \cdot (1,0) + (0,3/4)$. Dann sind s_1 und s_2 gegeben durch
$$\begin{aligned} s_1 \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x, 1/2 - y) \end{aligned}$$
bzw.
$$\begin{aligned} s_2 \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x, 3/2 - y) \end{aligned}$$
Insbesondere gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dass
$$f(x,y) = s_2 \circ s_1(x,y) = s_2(x, 1/2 - y) = (x, 1 + y).$$
Also ist
$$f(0,0) = (0,1) \quad \text{und} \quad f(1,0) = (1,1).$$

2. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zwei Teilmengen $A, B \subset X$ heißen *kongruent*, wenn es eine Isometrie $f \in \operatorname{Isom}(X,d)$ mit $f(A) = B$ gibt.

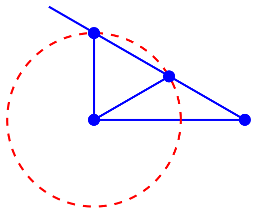
3. Wir betrachten die geodätischen Dreiecke Δ und Δ' in $(\mathbb{R}^2, d_2)$, die durch die Ecken

$$x := (0,0), y := (2,0), z := (0, 2/\sqrt{3})$$

bzw.

$$x' := (0,0), y' := (2,0), z' := (1, 1/\sqrt{3})$$

gegeben sind:



Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x'-y'\|_2 &= \|x-y\|_2 && (\text{da } x'=x \text{ und } y'=y) \\ \|x'-z'\|_2 &= 2/\sqrt{3} = \|x-z\|_2 && (\text{Pythagoras}) \\ \angle(x'-z', z'-y') &= \angle(x-y, z-y). && (\text{da } z-y \in \mathbb{R}\cdot z'-y') \end{aligned}$$

Die Dreiecke Δ und Δ' sind jedoch *nicht* kongruent, da die längste Seite von Δ (nämlich $z-y$) länger ist als die längste Seite von Δ'.

Da Δ und Δ' aber die SSW-Bedingung erfüllen, kann es somit keinen allgemeinen SSW-Kongruenzsatz in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ geben.

[Es gibt natürlich viele Möglichkeiten, konkrete Gegenbeispiele anzugeben oder zu argumentieren, warum es sie geben muss.]

Aufgabe 5 ($2+4+4=10$ Punkte).

1. Sei $A := [-2,2] \times [1,\infty) \subset H$. Zeigen Sie, dass $\mu_{\mathbb{H}^2}(A) = 4$ gilt. Begründen Sie Ihre Rechenschritte!
2. Gibt es ein geodätisches Dreieck Δ in (H, d_H) mit $\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \mu_{\mathbb{H}^2}(A)$? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ und $V \subset H$ nicht-leer und offen. Skizzieren Sie einen Beweis dafür, dass (U, d_2) und (V, d_H) *nicht* isometrisch sind (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen).

Lösung:

1. Nach Definition ist (da A messbar ist)
$$\begin{aligned}
\mu_{\mathbb{H}^2}(A) &= \mu_{\mathbb{H}^2}([-2,2] \times [1,\infty)) \\
&= \int_H \frac{1}{y^2} \cdot \chi_A(x,y)\, dx\, dy = \int_1^\infty \int_{-2}^2 \frac{1}{y^2}\, dx\, dy && \text{(Fubini)} \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{y^2} \cdot 4\, dy && \text{(HDI)} \\
&= -4 \cdot \frac{1}{y}\Big|_{y=1}^{\text{„}y=\infty\text{“}} = 4.
\end{aligned}$$
2. Nein, denn: Nach dem Satz von Gauß–Bonnet für hyperbolische Dreiecke hat jedes geodätische Dreieck in (H, d_H) einen Flächeninhalt, der kleiner als π ist (ist ein geodätisches Dreieck in einer gemeinsamen Geodäten enthalten, so ist der Flächeninhalt 0). Wegen $\mu_{\mathbb{H}^2}(A) = 4 > \pi$ folgt die Behauptung.
3. *Angenommen*, es gäbe eine Isometrie $f\colon (U, d_2) \longrightarrow (V, d_H)$. Insbesondere bildet diese Isometrie geodätische Dreiecke auf geodätische Dreiecke ab. Mit der metrischen Beschreibung der Winkel zwischen Geodäten in der euklidischen bzw. der hyperbolischen Ebene folgt außerdem, dass f auch winkeltreu ist.

   Da U nicht-leer und offen ist, enthält U ein euklidisches geodätisches Dreieck Δ, das nicht in einer einzigen Geodäten enthalten ist; dieses hat die Winkelsumme π. Das geodätische Dreieck Δ wird durch f auf ein geodätisches Dreieck Δ' in (V, d_H) abgebildet, das auch nicht in einer einzigen Geodäten enthalten ist. Da f winkeltreu ist, hat somit auch Δ' Winkelsumme π, im Widerspruch zum Satz von Gauß–Bonnet für hyperbolische geodätische Dreiecke.

   Also gibt es *keine* solche Isometrie.

Aufgabe 6 (4 + 2 + 4 = 10 Punkte)**.**

1. Geben Sie ein Beispiel für eine Möbiustransformation $f\colon H \longrightarrow H$, die $f \circ f(i) = i + 2023$ erfüllt.

   Begründen Sie Ihre Antwort und beschreiben Sie f geometrisch!

2. Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, so dass $f_A(i) = i$ für die assoziierte Möbiustransformation f_A gilt.

3. Folgern Sie: Ist $z \in H$, so gibt es unendlich viele $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, so dass $f_A(z) = z$ gilt

Lösung:

1. Sei
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2023/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Dann ist $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ und die assoziierte Möbiustransformation ist
$$\begin{aligned} f\colon H &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto \frac{1 \cdot z + 2023/2}{0 \cdot z + 1} = z + 2023/2, \end{aligned}$$
   d.h. horizontale Translation um 2023/2. Insbesondere ist
$$f \circ f(i) = f(i + 2023/2) = i + 2023/2 + 2023/2 = i + 2023.$$

2. Sei $M := \{A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \mid f_A(i) = i\} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Wir wissen bereits, dass $M = \mathrm{SO}(2)$ ist. Insbesondere ist
$$\begin{aligned} [0, \pi) &\longrightarrow \mathrm{SO}(2) = M \\ \varphi &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   wohldefiniert und injektiv. Da $[0, \pi)$ unendlich ist, folgt die Behauptung.

3. Sei $z \in H$. Aufgrund der Transitivität der Möbiustransformationen gibt es eine Matrix $B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit
$$f_B(z) = i.$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} c\colon M &\longrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto B^{-1}\cdot A\cdot B. \end{aligned}$$

Dann gilt:

- Ist $A \in M$, so ist $f_{c(A)}(z) = z$, denn

$$\begin{aligned} f_{c(A)}(z) &= f_{B^{-1}\cdot A\cdot B}(z) && \text{(Definition von } c\text{)} \\ &= f_B^{-1}\circ f_A \circ f_B(z) && \text{(Verträglichkeit der Möbiustrafos mit Matrixmultiplikation)} \\ &= f_B^{-1}\circ f_A(i) && \text{(Wahl von } B\text{)} \\ &= f_B^{-1}(i) && \text{(da } A \in M\text{)} \\ &= z. && \text{(Wahl von } B\text{)} \end{aligned}$$

- Die Abbildung c is injektiv, denn: Seien $A, A' \in M$ mit $c(A) = c(A')$. Dann folgt

$$\begin{aligned} A &= B\cdot B^{-1}\cdot A\cdot B\cdot B^{-1} \\ &= B\cdot c(A)\cdot B^{-1} \\ &= B\cdot c(A')\cdot B^{-1} \\ &= B\cdot B^{-1}\cdot A'\cdot B\cdot B^{-1} \\ &= A'. \end{aligned}$$

Da M nach dem zweiten Aufgabenteil unendlich ist, folgt die Behauptung.