Nachklausur zur Geometrie (Lehramt Gymnasium)

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold 5. Oktober 2023

Name: Vorname:

Matrikelnummer: □□□□□□□ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 4 = 10 Punkte). Die Sprache von *Kreisscheiben-Geometrie* enthält *Punkte*, *Kreisscheiben* und die Beziehung *„ist enthalten in“* zwischen Punkten und Kreisscheiben sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Kreisscheiben-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

K 1 Jede Kreisscheibe enthält mindestens zwei Punkte.

K 2 Es gibt zwei Kreise, die keine gemeinsamen Punkte enthalten.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie für Kreisscheiben-Geometrie: Es gibt *keine* Kreisscheiben-Geometrie mit genau drei Punkten.
2. Erfinden Sie eine (sinnvolle) Definition dafür, was ein *Modell* für Kreisscheiben-Geometrie ist.
3. Ist der folgende Satz unabhängig von den Kreisscheiben-Geometrie-Axiomen?

   > Es gibt einen Punkt, der in jeder bis auf einer Kreisscheibe enthalten ist.

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 ($3 + 2 + 4 + 1 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den eulerschen Polyedersatz.
2. Wie sind Facetten in diesem Kontext definiert?
3. Gibt es einen planaren Graphen, der genau 674 Knoten und genau 2023 Kanten besitzt?

   Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Auf welchen Graphen wird der eulersche Polyedersatz im Beweis des Satzes von Pick angewendet?

Aufgabe 3 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte).

1. Berechnen Sie in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ die Länge von

$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \bigl(\cos(-2\cdot t), \cos(2\cdot t)\bigr) \end{aligned}$$

   und begründen Sie Ihre Rechenschritte.

2. Gibt es eine stetige Kurve $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die sowohl $L_{(\mathbb{R}^2,d_2)}(\gamma) = 1$ als auch $L_{(\mathbb{R}^2,d_1)} = 1$ erfüllt?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Gibt es eine Isometrie $(\mathbb{R}^2, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 ($4 + 2 + 4 = 10$ Punkte)**.**

1. Geben Sie zwei Spiegelungen $s_1, s_2 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ an affinen Geraden an, so dass die Komposition $f := s_2 \circ s_1$ folgendes erfüllt:

$$f(0,0) = (1,1) \quad \text{und} \quad f(1,0) = (1,0).$$

   Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Wie und unter welchen Voraussetzungen ist der Winkel zwischen zwei Kurven in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ definiert?

3. Formulieren Sie den Kongruenzsatz WSW in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ und leiten Sie den Kongruenzsatz WSW in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ aus dem Kongruenzsatz SSS und dem Sinussatz ab.

Aufgabe 5 (4 + 4 + 2 = 10 Punkte)**.**

1. Gibt es ein geodätisches Dreieck Δ in (H, d_H) mit $\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = 3$ und so dass einer der Innenwinkel von Δ genau $\pi/6$ ist?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Seien $A := [1,2]\times[1,\infty)$, $B := [1,\infty)\times[1,2] \subset H$. Ist $\mu_{\mathbb{H}^2}(A) > \mu_{\mathbb{H}^2}(B)$?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Erklären Sie kurz, warum die hyperbolische Ebene das Parallelenaxiom nicht erfüllt.

Aufgabe 6 ($1 + 4 + 5 = 10$ Punkte)**.**

1. Sei $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Wie ist die Möbiustransformation zu A im Halbebenenmodell definiert?

2. Geben Sie ein Beispiel für eine Möbiustransformation $f\colon H \longrightarrow H$, die $f \circ f \circ f(i) = 2023 \cdot i$ erfüllt.

   Begründen Sie Ihre Antwort und beschreiben Sie f geometrisch!

3. Gibt es eine Möbiustranformation $f\colon H \longrightarrow H$, die $f(i) = i$ und $f(2 \cdot i) = 1 + 2 \cdot i$ erfüllt?

   Begründen Sie Ihre Antwort!