Nachklausur zur Geometrie (Lehramt Gymnasium)

Prof. Dr. C. Löh/M. Uschold — 5. Oktober 2023

Name: Vorname:

Matrikelnummer: Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 4 = 10 Punkte)**.** Die Sprache von *Kreisscheiben-Geometrie* enthält *Punkte*, *Kreisscheiben* und die Beziehung *„ist enthalten in“* zwischen Punkten und Kreisscheiben sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Kreisscheiben-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

K 1 Jede Kreisscheibe enthält mindestens zwei Punkte.

K 2 Es gibt zwei Kreise, die keine gemeinsamen Punkte enthalten.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie für Kreisscheiben-Geometrie: Es gibt *keine* Kreisscheiben-Geometrie mit genau drei Punkten.

2. Erfinden Sie eine (sinnvolle) Definition dafür, was ein *Modell* für Kreisscheiben-Geometrie ist.

3. Ist der folgende Satz unabhängig von den Kreisscheiben-Geometrie-Axiomen?

   > Es gibt einen Punkt, der in jeder bis auf einer Kreisscheibe enthalten ist.

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung: Korrektur. In K 2 sollte es „Kreisscheiben“ statt „Kreise“ heißen.

1. Sei eine Kreisscheiben-Geometrie gegeben. Nach K 2 gibt es zwei Kreise k_1 und k_2, die keine gemeinsamen Punkte enthalten. Nach K 1 enthalten k_1 und k_2 jeweils mindestens zwei Punkte. Also gibt es in dieser Kreisscheiben-Geometrie mindestens vier Punkte.

2. Ein *Modell für Kreisscheiben-Geometrie* ist ein Tripel $(P, K, \sqsubset)$, bestehend aus einer Menge P, einer Menge K und einer Relation „ $\sqsubset$ “ $\subset P \times K$, mit folgenden Eigenschaften:

   - Für alle $k \in P$ existieren $x, y \in P$ mit

$$(x \sqsubset k) \land (y \subset k) \land (x \neq y).$$

- Es existieren $k_1, k_2 \in K$ mit

$$\forall_{x \in P} \quad (x \sqsubset k_1 \Rightarrow x \not\sqsubset k_1) \land (x \sqsubset k_2 \Rightarrow x \not\sqsubset k_2).$$

[Man kann Kreisscheiben nicht ohne weiteres als Mengen der Punkte, die sie enthalten, modellieren, da die Axiome nicht implizieren, dass Kreisscheiben, die dieselben Punkte enthalten, bereits gleich sind.]

3. Ja, dieser Satz ist unabhängig von den Kreisscheiben-Geometrie-Axiomen, denn:

   - In dem Modell $(\{0,1,2,3\}, \{\{0,1\},\{2,3\}\}, \in)$ ist der Satz erfüllt.
   - In dem Modell $(\{0,\dots,5\}, \{\{0,1\},\{2,3\},\{4,5\}\}, \in)$ ist der Satz *nicht* erfüllt.

Aufgabe 2 ($3 + 2 + 4 + 1 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den eulerschen Polyedersatz.
2. Wie sind Facetten in diesem Kontext definiert?
3. Gibt es einen planaren Graphen, der genau 674 Knoten und genau 2023 Kanten besitzt?

   Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Auf welchen Graphen wird der eulersche Polyedersatz im Beweis des Satzes von Pick angewendet?

Lösung:

1. Sei $X = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender planarer Graph mit $V \neq \emptyset$ und sei $f\colon X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung mit genau F Facetten. Dann gilt
$$|V| - |E| + F = 2.$$
   Insbesondere ist die Anzahl der Facetten unabhängig von der gewählten planaren Einbettung.
2. Sei $f\colon X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung eines endlichen planaren Graphen X. Die Wegzusammenhangskomponenten des Komplements $\mathbb{R}^2 \setminus f(X_{\mathbb{R}})$ heißen *Facetten der Einbettung* f.
3. Nein, einen solchen Graphen gibt es nicht, denn: *Angenommen,* es gäbe einen solchen Graphen (V, E). Insbesondere ist (V, E) dann ein endlicher Graph. Im allgemeinen ist dieser Graph nicht notwendigerweise zusammenhängend; es gibt aber ein $n \in \mathbb{N}$ und disjunkte Zerlegungen $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_n$ bzw. $E = E_1 \sqcup \dots \sqcup E_n$, so dass $(V_1, E_1), \dots, (V_n, E_n)$ die Zusammenhangskomponenten von (V, E) sind. Insbesondere sind die (V_j, E_j) alle zusammenhängend und planar (da sie in (V, E) enthalten sind). Nach dem Sechsfarbensatz gilt somit für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$:
   - $|V_j| \leq 2$ (und $|E_j| \leq 1$) oder
   - $|V_j| \geq 3$ und $|E_j| \leq 3 \cdot |V_j| - 6$

Insbesondere gilt in beiden Fällen $|E_j| \leq 3 \cdot |V_j|$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} 2023 = |E| &= \sum_{j=1}^{n} |E_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} 3 \cdot |V_j| = 3 \cdot |V| \\ &= 3 \cdot 674 = 2022, \end{aligned}$$

was nicht sein kann.

4. Man wendet den eulerschen Polyedersatz auf eine Triangulierung des gegebenen Polygons mit ganzzahligen Eckenkoordinaten an (wobei in dieser Triangulierung keines der Dreiecke einen ganzzahligen Gitterpunkt enthält).

Aufgabe 3 $(2+4+4=10$ Punkte$)$.

1. Berechnen Sie in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ die Länge von

$$\begin{aligned}[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ t &\longmapsto \big(\cos(-2\cdot t), \cos(2\cdot t)\big)\end{aligned}$$

   und begründen Sie Ihre Rechenschritte.

2. Gibt es eine stetige Kurve $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die sowohl $L_{(\mathbb{R}^2,d_2)}(\gamma) = 1$ als auch $L_{(\mathbb{R}^2,d_1)} = 1$ erfüllt?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Gibt es eine Isometrie $(\mathbb{R}^2, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung: Korrektur. In Teilaufgabe 2 sollte es „$L_{(\mathbb{R}^2,d_1)}(\gamma)$“ statt „$L_{(\mathbb{R}^2,d_1)}$ heißen.

1. Sei γ die gegebene Kurve. Dann ist γ stetig differenzierbar und für alle $t \in [0,1]$ ist $\gamma(t) = (\cos(2\cdot t), \cos(2\cdot t))$. Mit der analytischen Beschreibung der Länge von Kurven folgt somit, dass

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \big\|\dot\gamma(t)\big\|_2 \, dt \\ &= \int_0^1 \big\|(-2\cdot\sin(2\cdot t), -2\cdot\sin(2\cdot t))\big\|_2 \, dt = \int_0^1 2\cdot\sqrt{2\cdot\sin^2(2\cdot t)}\, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{2}\cdot 2\cdot \sin(2\cdot t)\, dt \qquad\qquad (\text{da } \sin|_{[0,2]} \geq 0) \\ &= -\sqrt{2}\cdot\cos(2\cdot t)\,\Big|_{t=0}^{t=1} = \sqrt{2}\cdot\big(1-\cos(2)\big). \end{aligned}$$

   [Alternativ kann man auch direkt damit argumentieren, dass γ nur eine reparametrisierte Geodäte in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ von $(1,1)$ nach $(\cos 2, \cos 2)$ ist.]

2. Ja, denn: Wir betrachten

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ t &\longmapsto (t,0).\end{aligned}$$

Dann ist γ sowohl bezüglich d_1 als auch bezüglich d_2 eine Geodäte (lässt sich leicht überprüfen). Also ist

$$L_{(\mathbb{R}^2,d_1)}(\gamma) = d_1\big(\gamma(0), \gamma(1)\big) = \big\|(1,0)\big\|_1 = 1,$$
$$L_{(\mathbb{R}^2,d_2)}(\gamma) = d_2\big(\gamma(0), \gamma(1)\big) = \big\|(1,0)\big\|_2 = 1.$$

3. Nein, denn: Der metrische Raum $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist geodätisch, aber $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ ist *nicht* geodätisch. Da die Eigenschaft metrischer Räume, geodätisch zu sein, unter Isometrien erhalten bleibt, sind $(\mathbb{R}^2, d_2)$ und $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ *nicht* isometrisch.

Aufgabe 4 ($4 + 2 + 4 = 10$ Punkte).

1. Geben Sie zwei Spiegelungen $s_1, s_2 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ an affinen Geraden an, so dass die Komposition $f := s_2 \circ s_1$ folgendes erfüllt:

$$f(0,0) = (1,1) \quad \text{und} \quad f(1,0) = (1,0).$$

   Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Wie und unter welchen Voraussetzungen ist der Winkel zwischen zwei Kurven in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ definiert?

3. Formulieren Sie den Kongruenzsatz WSW in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ und leiten Sie den Kongruenzsatz WSW in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ aus dem Kongruenzsatz SSS und dem Sinussatz ab.

Lösung:

1. Wir verwenden die Spiegelung s_1 an der affinen Geraden $\mathbb{R} \cdot (1,0)$ und die Spiegelung s_2 an der affinen Geraden $\mathbb{R} \cdot (-1,1) + (1,0)$. Dann sind s_1 und s_2 gegeben durch

$$\begin{aligned} s_1 \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x,-y) \end{aligned}$$

   bzw.

$$\begin{aligned} s_2 \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (1-y, 1-x) \end{aligned}$$

   Insbesondere gilt

$$f(0,0) = s_2(0,0) = (0,1) \quad \text{und} \quad f(1,0) = s_2(1,0) = (1,0).$$

2. Sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum (z.B., $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt) und seien $\gamma_1 \colon [0, L_1] \longrightarrow V$ und $\gamma_2 \colon [0, L_2] \longrightarrow V$ stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\dot\gamma_1(0) \neq 0 \neq \dot\gamma_2(0)$. Dann definieren wir

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) := \sphericalangle(\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)) = \arccos \frac{\langle \dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0) \rangle}{\|\dot\gamma_1(0)\| \cdot \|\dot\gamma_2(0)\|} \in [0, \pi].$$

3. Seien Δ und Δ' geodätische Dreiecke in $(\mathbb{R}^2, d_2)$, deren Eckpunkte jeweils nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Seien a, b, c die Seiten von Δ und seien a', b', c' die Seiten von Δ'. Seien α, β, γ bzw. α', β', γ' die entsprechenden gegenüberliegenden Winkel in Δ bzw. Δ'. Es gelte die WSW-Bedingung

$$\beta = \beta', \qquad \|a\|_2 = \|a'\|_2, \qquad \gamma = \gamma'.$$

Der *Kongruenzsatz WSW* besagt unter diesen Voraussetzungen, dass Δ und Δ' in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ kongruent sind.

Wir leiten ihn aus dem Kongruenzsatz SSS (und dem Sinussatz) her: Nach dem Kongruenzsatz SSS genügt es zu zeigen, dass $\|b\|_2 = \|b'\|_2$ und $\|c\|_2 = \|c'\|_2$ gilt.

Aus dem Sinussatz und der Winkelsumme in euklidischen Dreiecken erhalten wir

$$\frac{\|b\|_2}{\|a\|_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin(\pi - \beta - \gamma)}.$$

Mit der SWS-Voraussetzung und dem Sinussatz in Δ' folgt daraus

$$\begin{aligned}
\|b\|_2 &= \|a\|_2 \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\pi - \beta - \gamma)} \\
&= \|a'\|_2 \cdot \frac{\sin\beta'}{\sin(\pi - \beta' - \gamma')} \\
&= \|b'\|_2.
\end{aligned}$$

Analog zeigt man $\|c\|_2 = \|c'\|_2$.

Aufgabe 5 ($4 + 4 + 2 = 10$ Punkte)**.**

1. Gibt es ein geodätisches Dreieck Δ in (H, d_H) mit $\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = 3$ und so dass einer der Innenwinkel von Δ genau $\pi/6$ ist?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Seien $A := [1,2] \times [1,\infty)$, $B := [1,\infty) \times [1,2] \subset H$. Ist $\mu_{\mathbb{H}^2}(A) > \mu_{\mathbb{H}^2}(B)$?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Erklären Sie kurz, warum die hyperbolische Ebene das Parallelenaxiom nicht erfüllt.

Lösung:

1. Nein, denn: *Angenommen*, es gäbe ein solches geodätisches Dreieck Δ mit Innenwinkeln α, β, γ sowie $\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = 3$ und $\alpha = \pi/6$. Wegen $\alpha = \pi/6$ ist Δ nicht vollständig in einer gemeinsamen Geodäten enthalten. Mit dem Satz von Gauß–Bonnet für hyperbolische Dreiecke folgt somit

   $$3 = \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \leq \pi - \alpha = \frac{5}{6} \cdot \pi < 3,$$

   was nicht sein kann.

2. Nein, denn: Mit dem Satz von Fubini berechnen wir

   $$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{H}^2}(A) &= \int_H \chi_A(z) \ \mathrm{dvol}_H = \int_1^\infty \int_1^2 \frac{1}{y^2} \, dx \, dy \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{y^2} \, dy = \lim_{t\to\infty} \Bigl(-\frac{1}{t} + 1\Bigr) = 1 \end{aligned}$$

   und

   $$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{H}^2}(B) &= \int_H \chi_B(z) \ \mathrm{dvol}_H = \int_1^\infty \int_1^2 \frac{1}{y^2} \, dy \, dx \\ &= \int_1^\infty 1 - \frac{1}{2} \, dx = \infty. \end{aligned}$$

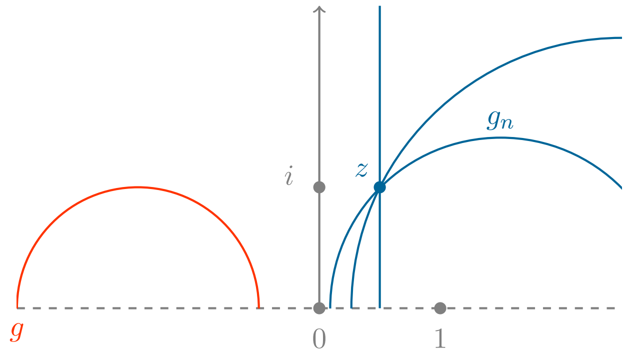
3. Die hyperbolische Ebene (H, d_H) erfüllt *nicht* die folgende Version des Parallelenaxioms:

> Zu jeder geodätischen Gerade g und zu jedem Punkt z, der nicht auf g liegt, gibt es nur eine geodätische Gerade (bis auf Umparametrisierung), die durch z geht und g nicht schneidet.

Genauer gilt: Ist $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow H$ eine geodätische Gerade in (H, d_H) und ist $z \in H \setminus g(\mathbb{R})$, so gibt es unendlich viele geodätische Geraden $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (H, d_H) mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $z \in g_n(\mathbb{R})$ und $g_n(\mathbb{R}) \cap g(\mathbb{R}) = \emptyset$.
- Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ ist $g_n(\mathbb{R}) \cap g_m(\mathbb{R}) = \{z\}$.

Dies lässt sich leicht anhand der Charakterisierung von hyperbolischen geodätischen Geraden in (H, d_H) einsehen:



Aufgabe 6 ($1 + 4 + 5 = 10$ Punkte)**.**

1. Sei $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Wie ist die Möbiustransformation zu A im Halbebenenmodell definiert?
2. Geben Sie ein Beispiel für eine Möbiustransformation $f \colon H \longrightarrow H$, die $f \circ f \circ f(i) = 2023 \cdot i$ erfüllt.

   Begründen Sie Ihre Antwort und beschreiben Sie f geometrisch!
3. Gibt es eine Möbiustranformation $f \colon H \longrightarrow H$, die $f(i) = i$ und $f(2 \cdot i) = 1 + 2 \cdot i$ erfüllt?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Sei
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
   Die zu $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ assoziierte Möbiustransformation ist
$$\begin{aligned} H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}. \end{aligned}$$
2. Sei $\lambda := \sqrt[6]{2023}$ und
$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}.$$
   Dann ist $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$; sei $f \colon H \longrightarrow H$ die zugehörige Möbiustransformation. Für alle $z \in H$ gilt
$$f(z) = \frac{\lambda \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1/\lambda} = \lambda^2 \cdot z.$$
   Geometrisch handelt es sich bei f im Halbebenenmodell also um eine Streckung um den Faktor $\lambda^2 = \sqrt[3]{2023}$.

   Außerdem erhalten wir
$$f \circ f \circ f(i) = \lambda^2 \cdot \lambda^2 \cdot \lambda^2 \cdot i = \lambda^6 \cdot i = 2023 \cdot i.$$

3. Nein, denn: *Angenommen*, es gäbe eine solche Möbiustransformation $f\colon H \longrightarrow H$. Möbiustransformationen sind Isometrien von (H, d_H).

   Die hyperbolische Ebene ist geodätisch. Also existiert eine Geodäte γ von i nach $1 + 2 \cdot i$. Insbesondere ist $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = d_H(i, 1 + 2 \cdot i)$. Mit der vertikalen Abschätzung folgt (da γ nicht vertikal sein kann)

$$
\begin{aligned}
d_H(i, 2 \cdot i) &= d_H\bigl(f(i), f(2 \cdot i)\bigr) && (f \text{ ist eine Isometrie})\\
&= d_H(i, 1 + 2 \cdot i)\\
&= L_{\mathbb{H}^2}(\gamma)\\
&> L_{\mathbb{H}^2}(p \circ \gamma) && (\text{vertikale Abschätzung})\\
&\geq d_H(i, 2 \cdot i),
\end{aligned}
$$

   was nicht sein kann; hierbei bezeichnet p die Projektion auf die imaginäre Achse.