Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh Blatt 0 vom 21. Oktober 2010

Aufgabe 1 (Untergruppen)**.** Sei G eine Gruppe und seien H und K Untergruppen von G.

1. Ist $H \cap K$ eine Untergruppe von G ?
2. Ist $H \cup K$ eine Untergruppe von G ?

Aufgabe 2 (Isomorphie von Gruppen)**.**

1. Sind die additiven Gruppen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^2$ isomorph?
2. Sind die additiven Gruppen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ isomorph?

Aufgabe 3 (Isometriegruppe des Einheitsquadrats)**.** Sei $Q := [0,1] \times [0,1]$ das Einheitsquadrat in $\mathbb{R}^2$ (mit der Metrik induziert von der euklidischen Metrik in $\mathbb{R}^2$).

1. Geben Sie eine algebraische Beschreibung der Isometriegruppe I von Q (z.B. durch Angabe der Verknüpfungstabelle).
2. Gibt es eine weitere Gruppe, die genausoviele Elemente enthält wie I, aber nicht zu I isomorph ist?

Aufgabe 4 (Weitere Isometriegruppen)**.** Gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine Teilmenge $X_n \subset \mathbb{R}^2$, so dass die Isometriegruppe von X_n zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ isomorph ist?

Aufgabe 5 (Universelle Eigenschaft der Quotientengruppe)**.** Beweisen Sie die universelle Eigenschaft der Quotientengruppe: Sei G eine Gruppe, sei N ein Normalteiler von G und sei $\pi\colon G \longrightarrow G/N$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass es zu jeder Gruppe H und jedem Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \longrightarrow H$ mit $N \subset \ker\varphi$ genau einen Homomorphismus $\overline{\varphi}\colon G/N \longrightarrow H$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$ gibt.

Aufgabe 6 (Kern und Injektivität)**.** Sei $\varphi\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass φ genau dann injektiv ist, wenn $\ker\varphi$ trivial ist.
2. Sei $\overline{\varphi}\colon G/\ker\varphi \longrightarrow H$ der von φ induzierte Homomorphismus auf der Quotientengruppe. Zeigen Sie, dass $\overline{\varphi}$ injektiv ist.

Keine Abgabe; Besprechung am 27. Oktober 2010