Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 1 vom 25. Oktober 2010

Aufgabe 1 (Endlich erzeugte Gruppen)**.**

1. Ist die additive Gruppe $\mathbb{Q}$ endlich erzeugt?
2. Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe S_X genau dann endlich erzeugt ist, wenn X endlich ist.

Aufgabe 2 (Gruppen, die nicht frei sind)**.** Zeigen Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaft von freien Gruppen, dass die (additiven) Gruppen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^2$ nicht frei sind.

Aufgabe 3 (Freie Gruppen und Erzeugendensysteme)**.**

1. Sei S eine Menge und sei F die freie Gruppe erzeugt von S. Zeigen Sie: Ist $S' \subset F$ ein Erzeugendensystem von F, so folgt $|S'| \geq |S|$.
2. Zeigen Sie, dass die freie Gruppe in zwei Erzeugern eine Untergruppe enthält, die nicht von zwei Elementen erzeugt werden kann. [Tatsächlich enthält die freie Gruppe in zwei Erzeugern sogar Untergruppen, die nicht endlich erzeugt sind.]

Aufgabe 4 (Automorphismengruppen)**.**

1. Schlagen Sie die Definition der Begriffe *Kategorie* und *Isomorphismus* bzw. *Automorphismus* (in einer Kategorie) nach.
2. Sei C eine Kategorie und sei X ein Objekt von C. Zeigen Sie, dass die Menge der Automorphismen von X in C eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung von Morphismen in C bildet.
3. Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass es dann eine Kategorie C und ein Objekt X in C gibt, so dass G und die Automorphismengruppe von X in C isomorph sind.

Abgabe bis 2. November (9:00 Uhr; *Dienstag!*), Besprechung am 3. November