# Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 11 vom 17. Januar 2011

---

**Aufgabe 1** (Quotienten der unteren Zentralreihe)**.** Sei $G$ eine Gruppe und es sei $j \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie, dass $C_{j+1}(G) \subset C_j(G)$.
2. Zeigen Sie, dass $C_{j+1}(G)$ ein Normalteiler in $C_j(G)$ ist und dass die Quotientengruppe $C_j(G)/C_{j+1}(G)$ abelsch ist.

**Aufgabe 2** (Seltsamer quasigeodätischer Strahl in $\mathbb{R}^2$)**.** Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto t \cdot \bigl(\sin(\ln(1+t)), \cos(\ln(1+t))\bigr) \end{aligned}$$

bezüglich den Standardmetriken auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ eine quasiisometrische Einbettung ist. (Daraus folgt, dass der Stabilitätssatz für Quasigeodäten im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$ nicht gilt.)

**Aufgabe 3** (Die hyperbolische Ebene)**.** Beschreiben Sie mit Hilfe geeigneter Literatur kurz eines der Modelle der hyperbolischen Ebene.

**Aufgabe 4** (Abstand zwischen Geodäten und Kurven in hyperbolischen Räumen)**.** Vervollständigen Sie die Beweisskizze aus der Vorlesung zu folgender Aussage: Sei $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und sei $(X, d)$ ein $\delta$-hyperbolischer Raum. Sei $\gamma\colon [0, L] \longrightarrow X$ eine stetige Kurve und sei $\gamma'\colon [0, L'] \longrightarrow X$ eine Geodäte von $\gamma(0)$ nach $\gamma(L)$. Zeigen Sie für alle $t \in [0, L']$, dass

$$d\bigl(\gamma'(t), \operatorname{im}\gamma\bigr) \leq \delta \cdot \bigl|\ln_2 \ell(\gamma)\bigr| + 1,$$

wobei die *Länge* $\ell(\gamma)$ von $\gamma$ durch

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) := \sup\Biggl\{ \sum_{j=0}^{k-1} d\bigl(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})\bigr) \Biggm| k \in \mathbb{N},\ t_0, \dots, t_k \in [0, L],\ t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \Biggr\} \\ \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

definiert ist.

---

Abgabe am 24. Januar (in der Vorlesung), Besprechung am 26. Januar