Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh Blatt 12 vom 24. Januar 2011

Aufgabe 1 (Geometrische Realisierung von Graphen**).** Sei $X = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.

1. Zeigen Sie, dass die geometrische Realisierung $|X|$ von X zusammen mit der in der Vorlesung definierten Metrik ein geodätischer metrischer Raum ist.

2. Zeigen Sie, dass die Menge V der Knoten von X zusammen mit der von dem Graphen X induzierten Metrik zur geometrischen Realisierung $|X|$ von X quasi-isometrisch ist.

Aufgabe 2 (Geometrische Realisierung von Cayley-Graphen**).**

1. Zeigen Sie: Die geometrische Realisierung des Cayley-Graphen $\operatorname{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$ ist zur reellen Geraden $\mathbb{R}$ (mit der Standardmetrik) isometrisch.

2. Ist die geometrische Realisierung des Cayley-Graphen $\operatorname{Cay}(F, S)$ einer freien Gruppe F vom Rang 2 bezüglich eines freien Erzeugendensystems S von F zu einer Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ (bezüglich der von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik) isometrisch?

Aufgabe 3 (Metrische Bäume sind hyperbolisch**).** Sei X ein Baum. Zeigen Sie, dass die geometrische Realisierung $|X|$ von X ein 0-hyperbolischer Raum ist.

Aufgabe 4 (Approximation quasi-geodätischer Räume durch geodätische Räume**).** Sei X ein quasi-geodätischer Raum. Zeigen Sie, dass X zu einem geodätischen Raum quasi-isometrisch ist, indem Sie aus X einen geeigneten zusammenhängenden Graphen konstruieren.

Abgabe am 31. Januar (in der Vorlesung), Besprechung am 2. Februar