Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 14 vom 7. Februar 2011

Aufgabe 1 (Schnitte quasi-konvexer Unterräume)**.** Geben Sie ein Beispiel für einen hyperbolischen metrischen Raum X und zwei quasi-konvexe Unterräume $C, C' \subset X$ mit der Eigenschaft, dass der Durchschnitt $C \cap C'$ nicht quasi-konvex ist.

Aufgabe 2 (Schnitte quasi-konvexer Untergruppen)**.** Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und sei $S \subset G$ ein endliches Erzeugendensystem. Zeigen Sie: Sind $H,\ H' \subset G$ bezüglich S quasi-konvexe Untergruppen von G, so ist auch $H \cap H'$ in G quasi-konvex bezüglich S.
Hinweis. Sei $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so gewählt, dass H und H' in $|\operatorname{Cay}(G,S)|$ bezüglich S jeweils c-quasi-konvex sind. Sei

$$C := \bigl|B_C^{G,S}(e)\bigr|^2.$$

Zeigen Sie, dass $H \cap H'$ dann C-quasi-konvex bezüglich S ist, indem Sie wie folgt vorgehen: Sei $h \in H \cap H'$ und sei $\gamma\colon [0,L] \longrightarrow |\operatorname{Cay}(G,S)|$ eine Geodäte von e nach h. Betrachten Sie zu $t \in [0,L]$ mit $\gamma(t) \in G$ die Menge

$$\begin{aligned} M := \bigl\{ g \in G \bigm| {} & \gamma(t)\cdot g \in H \cap H',\ \text{und für jedes } k \in G, \\ & \text{das auf einer Geodäte in } |\operatorname{Cay}(G,S)| \text{ von } e \text{ nach } g \text{ liegt,} \\ & \text{gilt } d_S(\gamma(t)\cdot k, H) \leq c \text{ und } d_S(\gamma(t)\cdot k, H') \leq c \bigr\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass M nicht leer ist und dass jedes $d_S(e,\,\cdot\,)$-minimale Element g aus M die Abschätzung $d_S(e,g) \leq C$ erfüllt.

Aufgabe 3 (Produkte hyperbolischer Gruppen)**.** Geben Sie eine Charakterisierung (d.h. notwendige und hinreichende Bedingungen), wann das Produkt $G \times H$ zweier endlich erzeugter Gruppen G und H hyperbolisch ist.

Aufgabe 4. Sei $G := \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, wobei $\alpha\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Aut}\bigl(\bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\bigr)$ durch Translation gegeben ist.

1. Zeigen Sie, dass G endlich erzeugt ist.
2. Zeigen Sie, dass G nicht hyperbolisch ist.
3. Enthält G eine Untergruppe, die zu $\mathbb{Z}^2$ isomorph ist?

Keine Abgabe