Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh Blatt 3 vom 8. November 2010

Aufgabe 1 (Spezielle freie amalgamierte Produkte)**.** Sei $\alpha\colon A \longrightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus.

1. Bestimmen Sie das freie amalgamierte Produkt $G *_A 1$ bezüglich α und dem trivialen Homomorphismus $A \longrightarrow 1$.

2. Bestimmen Sie das freie amalgamierte Produkt $G *_A A$ bezüglich α und id_A.

Aufgabe 2 (Spaltende Erweiterungen und semi-direkte Produkte)**.** Sei

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\ i\ } G \xrightarrow{\ \pi\ } Q \longrightarrow 1$$

eine Gruppenerweiterung, die einen Spalt besitzt. Zeigen Sie, dass die Erweiterungsgruppe G zu einem semi-direkten Produkt von Q und N isomorph ist.

Aufgabe 3 (Heisenberggruppe)**.** Sei H die *Heisenberggruppe*, d.h.

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x,\ y,\ z \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}).$$

1. Die Heisenberggruppe ist eine Erweiterung von $\mathbb{Z}^2$ durch $\mathbb{Z}$:

   $$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ i\ } H \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 1;$$

   hierbei sind $i\colon \mathbb{Z} \longrightarrow H$ und $\pi\colon H \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ wie folgt gegeben:

   $$i\colon z \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \pi\colon \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto (x, y).$$

   Zeigen Sie, dass diese Gruppenerweiterung nicht spaltet.

2. Geben Sie eine Präsentation der Heisenberggruppe mit genau drei Erzeugern und genau drei Relationen an (und beweisen Sie, dass diese tatsächlich eine Präsentation der Heisenberggruppe ist).

Aufgabe 4 (Äquivalenz von Erweiterungen)**.**

1. Schlagen Sie nach, wann zwei Gruppenerweiterungen *äquivalent* heißen.

2. Geben Sie drei paarweise nicht-äquivalente Gruppenerweiterungen der folgenden Form an:

   $$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ ?\ } ? \xrightarrow{\ ?\ } \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

Abgabe am 15. November (in der Vorlesung), Besprechung am 17. November