Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 8 vom 13. Dezember 2010

Aufgabe 1 (Eine mengentheoretische Kopplung von $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}$**).** Sei $G := \mathbb{Z}$ und $H := \mathbb{Z}$. Wir betrachten die Linksoperation von G auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{aligned} G \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \bigl(n, (x, y)\bigr) &\longmapsto (n + x, y) \end{aligned}$$

und die Rechtsoperation von H auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times H &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \bigl((x, y), n\bigr) &\longmapsto (x, y + n). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ zusammen mit diesen Operationen von G und H eine mengentheoretische Kopplung von G und H ist.

Aufgabe 2 (Mengentheoretische Kopplungen und endliche Erzeugtheit**).** Seien G und H zwei Gruppen, für die es eine mengentheoretische Kopplung gibt. Zeigen Sie: Die Gruppe G ist genau dann endlich erzeugt, wenn H endlich erzeugt ist.

Aufgabe 3 (Maß-Äquivalenz**).** Schlagen Sie nach, wann zwei Gruppen *maß-äquivalent* („measure equivalent“) heißen und vergleichen Sie diese Definition mit dem dynamischen Kriterium für Quasiisometrie.

Aufgabe 4 (Die Heisenberggruppe als Gitter**).** Sei $H_\mathbb{R}$ die *reelle Heisenberggruppe* und $H \subset H_\mathbb{R}$ die Heisenberggruppe (s. Blatt 3):

$$H_\mathbb{R} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R} \right\}, \qquad H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ x,\ y,\ z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Wir versehen $H_\mathbb{R}$ mit der Topologie, die durch Konvergenz aller Matrizenkoeffizienten gegeben ist.

1. Zeigen Sie, dass $H_\mathbb{R}$ bezüglich dieser Topologie eine lokalkompakte topologische Gruppe ist.
2. Zeigen Sie, dass die Untergruppe H ein kokompaktes Gitter in $H_\mathbb{R}$ ist.

Abgabe am 20. Dezember (in der Vorlesung), Besprechung am 22. Dezember(?)