Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 1 vom 10. Oktober 2014

Aufgabe 1 (endlich erzeugt?)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Die additive Gruppe $\mathbb{Q}$ ist endlich erzeugt.
2. Ist X unendlich, so ist die symmetrische Gruppe S_X *nicht* endlich erzeugt.

Aufgabe 2 (äußere Automorphismengruppen)**.**

1. Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Menge $\operatorname{Inn}(G)$ der inneren Automorphismen von G eine normale Untergruppe in $\operatorname{Aut}(G)$ ist.
2. Bestimmen Sie $\operatorname{Out}(\mathbb{Z}) = \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}) / \operatorname{Inn}(\mathbb{Z})$ (und begründen Sie Ihre Antwort).

Aufgabe 3 (unfreie Gruppen)**.** Zeigen Sie mithilfe der universellen Eigenschaft freier Gruppen:

1. Die additive Gruppe $\mathbb{Z}/2014$ ist *nicht* frei.
2. Die additive Gruppe $\mathbb{Z}^2$ ist *nicht* frei.

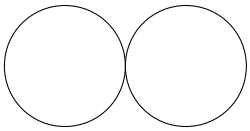
Aufgabe 4 (Rang freier Gruppen)**.** Sei F eine freie Gruppe.

1. Sei S ein freies Erzeugendensystem von F und sei S' ein weiteres Erzeugendensystem von F. Zeigen Sie, dass $|S'| \geq |S|$ gilt.
2. Folgern Sie: Alle freien Erzeugendensysteme von F haben dieselbe Mächtigkeit (der sogenannte *Rang* von F).

Hinweis. Wenn Sie möchten, können Sie sich auf den endlich erzeugten Fall einschränken.

Bonusaufgabe (Abbildungsklassengruppen)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur den Begriff der *Abbildungsklassengruppe* (z.B. von Mannigfaltigkeiten bzw. topologischen Räumen) nach. Welche formale Ähnlichkeit besteht zwischen dieser Definition und der Definition äußerer Automorphismengruppen von Gruppen?
2. *Falls Sie keine Vorkenntnisse in Algebraischer Topologie haben.* Schlagen Sie in der Literatur nach, wie die Einpunktvereinigung $S^1 \vee S^1$ definiert ist und was ihre Fundamentalgruppe ist.
3. *Falls Sie Vorkenntnisse in Algebraischer Topologie haben.* Sei F eine freie Gruppe vom Rang 2. Was hat $\operatorname{Out}(F)$ mit $S^1 \vee S^1$ zu tun?



Abgabe bis zum 17. Oktober 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten