Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 10 vom 12. Dezember 2014

Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Zu einer Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ betrachten wir das semi-direkte Produkt $G_A := \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ bezüglich des Homomorphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$, der durch die Operation von den Potenzen von A auf $\mathbb{Z}^n$ durch Matrixmultiplikation gegeben ist.

Aufgabe 1 (Auflösbarkeit/Nilpotenz von Matrixgruppen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Für alle $n \in \mathbb{N}_{>1}$ und alle Matrizen $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ ist G_A auflösbar.
2. Die Gruppe G_A ist virtuell nilpotent, falls
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (exponentielles Wachstum auflösbarer Gruppen)**.**

1. Zeigen Sie (ohne den polynomialen Wachstumssatz zu verwenden), dass G_A *nicht* nilpotent ist, wenn
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Bonusaufgabe. Zeigen Sie, dass G_A in diesem Fall auch nicht virtuell nilpotent ist.
2. Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$ und sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ eine Matrix, die über $\mathbb{C}$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \geq 2$ besitzt. Zeigen Sie, dass es ein $x \in \mathbb{Z}^n$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k \in \{0, 1\}$ sind die 2^{k+1} Elemente $\sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j \cdot A^j \cdot x \in \mathbb{Z}^n$ verschieden.
Folgern Sie daraus, dass G_A exponentielles Wachstum besitzt.

Aufgabe 3 (freie Gruppen und Auflösbarkeit)**.** Zeigen Sie, dass freie Gruppen vom Rang mindestens 2 *nicht* virtuell auflösbar sind.

Aufgabe 4 (die Hilbertschen Probleme)**.** David Hilbert hat am 8. August 1900 beim International Congress of Mathematicians in Paris den Vortrag *Mathematische Probleme* gehalten. Diese Probleme sind nun als die 23 Hilbertschen Probleme bekannt.

1. Bilden Sie so lange iterierte Quersummen Ihrer Matrikelnummer, bis Sie erstmalig eine Zahl q zwischen 1 und 23 erhalten. Beschreiben Sie kurz Hilberts q-tes Problem und ob bzw. inwieweit das Problem heute gelöst ist (inkl. entsprechender Quellenangaben).
2. Welches der Hilbertschen Probleme ist Ihrer Meinung nach am Interessantesten? Begründen Sie Ihre Auswahl kurz.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (endliche Erzeugtheit und Projektionen auf $\mathbb{Z}$)**.** Sei G eine endlich erzeugte Gruppe, deren Wachstum nicht exponentiell ist, und für die es einen surjektiven Homomorphismus $\pi\colon G \longrightarrow \mathbb{Z}$ gibt. Zeigen Sie, dass dann auch der Kern von π endlich erzeugt ist.

Hinweis. Wählen Sie ein $g \in G$ mit $\pi(g) = 1$. Zeigen Sie, dass es eine endliche Menge $S \subset \ker\varphi$ gibt, so dass $\{g\} \cup S$ die Gruppe G erzeugt. Zu $s \in S$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$g_{n,s} := g^n \cdot s \cdot g^{-n} \in \ker\varphi.$$

Zeigen Sie nun, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\ker\varphi$ von der (endlichen!) Menge $\{g_{n,s} \mid s \in S, n \in \{-N, \ldots, N\}\}$ erzeugt wird.

Abgabe bis zum 19. Dezember 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten