Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 11 vom 19. Dezember 2014

Aufgabe 1 (Wachstum hyperbolischer Gruppen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Jede endlich erzeugte unendliche hyperbolische Gruppe hat exponentielles Wachstum.
2. Jede endlich erzeugte Gruppe mit exponentiellem Wachstum ist hyperbolisch.

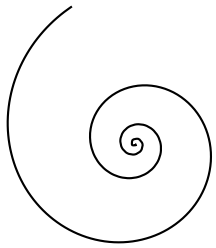
Aufgabe 2 (Hyperbolizität von Graphen)**.**

1. Zeigen Sie: Ist T ein Baum, so ist die geometrische Realisierung $|T|$ ein 0-hyperbolischer Raum. Illustrieren Sie Ihre Argumente anhand geeigneter Skizzen.
2. Sei G ein zusammenhängender Graph mit der Eigenschaft, dass $|G|$ ein hyperbolischer metrischer Raum ist. Ist dann G bereits ein Baum? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (seltsamer quasi-geodätischer Strahl in $\mathbb{R}^2$)**.**

1. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto t \cdot \bigl(\sin(\ln(1+t)), \cos(\ln(1+t))\bigr) \end{aligned}$$



bezüglich den Standardmetriken auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ eine quasi-isometrische Einbettung ist.

2. Folgern Sie, dass der Stabilitätssatz für Quasi-Geodäten im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$ nicht gilt.

Aufgabe 4 (hyperbolische Ebene)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur nach wie die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}^2$ als metrischer Raum im oberen Halbebenenmodell beschrieben werden kann. Welche Topologie induziert diese Metrik? Erklären Sie kurz, wie die Geodäten in diesem Raum aussehen (und wie man das beweisen kann).
2. Zeigen Sie, dass die Operation von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ auf der oberen Halbebene durch Möbiustransformationen (s. Bonusaufgabe von Blatt 7) bezüglich dieser Metrik isometrisch ist.

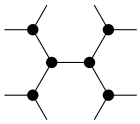
   Hinweis. Betrachten Sie ein geeignetes Erzeugendensystem von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ und zeigen Sie durch Nachrechnen, dass diese Erzeuger isometrisch operieren.

Bitte wenden

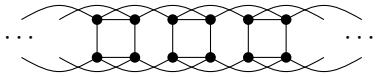
Die folgenden Aufgaben bieten die Gelegenheit, den bisher gelernten Stoff zu wiederholen und zu vertiefen.

Bonusaufgabe (Cayley-Graphen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gibt eine endlich erzeugte Gruppe G mit endlichem Erzeugendensystem S, so dass der zugehörige Cayley-Graph $\mathrm{Cay}(G, S)$ ein Baum ist, in dem alle Knoten Grad 3 haben.



2. Es gibt eine endlich erzeugte Gruppe G mit endlichem Erzeugendensystem S, so dass der zugehörige Cayley-Graph $\mathrm{Cay}(G, S)$ zu



isomorph ist.

Bonusaufgabe (Homomorphismen und Quasi-Isometrie)**.** Seien G und H endlich erzeugte Gruppen.

1. Charakterisieren Sie die Gruppenhomomorphismen $G \longrightarrow H$, die Quasi-Isometrien sind.

2. Hat jeder quasi-isometrische Gruppenhomomorphismus $G \longrightarrow H$ endlichen Abstand von einer Bilipschitz-Äquivalenz? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (Quasi-Isometrie/Bilipschitz-Äquivalenz von freien Produkten)**.** Seien G, G' und H endlich erzeugte Gruppen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Sind G und G' quasi-isometrisch, so sind auch $G * H$ und $G' * H$ quasi-isometrisch.

2. Sind G und G' bilipschitz-äquivalent, so sind auch $G * H$ und $G' * H$ bilipschitz-äquivalent.

Bonusaufgabe (Skript)**.** Finden Sie möglichst viele Fehler im Skript!

Außerdem können auch weiterhin noch Lösungen zur Bonusaufgabe von Blatt 6 und zur Bonusaufgabe von Blatt 8 abgegeben werden.

Abgabe bis zum 9. Januar 2015, 10:00 Uhr, in den Briefkasten

Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr!