Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 12 vom 9. Januar 2015

Aufgabe 1 (freie Produkte und Hyperbolizität)**.** Seien G und H endlich erzeugte Gruppen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Sind G und H hyperbolisch, so ist auch $G * H$ hyperbolisch.
2. Ist $G * H$ hyperbolisch, so sind auch G und H hyperbolisch.

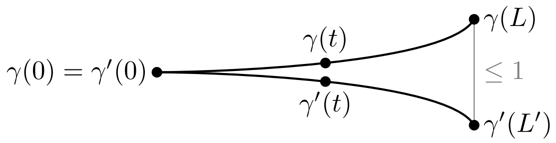
Aufgabe 2 (Geodäten in hyperbolischen Räumen)**.** Sei $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sei X ein δ-hyperbolischer metrischer Raum und $\gamma \colon [0, L] \longrightarrow X$ und $\gamma' \colon [0, L'] \longrightarrow X$ seien Geodäten in X mit

$$\gamma(0) = \gamma'(0) \quad \text{und} \quad d\bigl(\gamma(L), \gamma'(L')\bigr) \leq 1.$$

Zeigen sie, dass γ und γ' dann gleichmäßig $(2 \cdot \delta + 2)$-nah sind, d.h., dass

$$\forall_{t,t' \in [0, \min(L,L')]} \quad d\bigl(\gamma(t), \gamma'(t)\bigr) \leq 2 \cdot \delta + 2.$$

Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!



Aufgabe 3 (Quasi-Isometrie-Starrheit von $\mathbb{Z}$)**.** Sei G eine endlich erzeugte Gruppe, die zu $\mathbb{Z}$ quasi-isometrisch ist, sei $g \in G$ ein Element unendlicher Ordnung (ein solches existiert immer, s. Vorlesung) und sei $S \subset G$ ein endliches Erzeugendensystem von G.

1. Zeigen Sie, dass ein $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgender Eigenschaft existiert: Für alle $h \in G$ gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $d_S(h, g^n) \leq c$.
2. Folgern Sie, dass die unendlich zyklische Untergruppe $\langle g \rangle_G$ endlichen Index in G hat.

Aufgabe 4 (quasi-konvexe Untergruppen)**.** Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und sei $S \subset G$ ein endliches Erzeugendensystem. Eine Untergruppe H von G ist *quasi-konvex bezüglich* S, wenn es ein $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgender Eigenschaft gibt: Jede Geodäte in $|\operatorname{Cay}(G, S)|$, deren Start- und Endpunkt in H liegt, ist c-nah an den Knoten aus H.

1. Zeigen Sie: Ist $H \subset G$ eine bezüglich S quasi-konvexe Untergruppe, so ist H endlich erzeugt und der Inklusionshomomorphismus $H \longrightarrow G$ ist eine quasi-isometrische Einbettung.
2. Gilt auch die Umkehrung? Ist also jede endlich erzeugte Untergruppe H von G, für die der Inklusionshomomorphismus $H \longrightarrow G$ eine quasi-isometrische Einbettung ist, bereits quasi-konvex bezüglich S?

Illustrieren Sie Ihre Argumente jeweils durch geeignete Skizzen!

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Schnitte quasi-konvexer Untergruppen)**.** Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und sei $S \subset G$ ein endliches Erzeugendensystem. Zeigen Sie: Sind H, $H' \subset G$ bezüglich S quasi-konvexe Untergruppen von G, so ist auch $H \cap H'$ bezüglich S in G quasi-konvex.

Hinweis. Sei $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so gewählt, dass H und H' in $|\operatorname{Cay}(G, S)|$ bezüglich S jeweils c-quasi-konvex sind. Sei

$$C := \left|B_c^{G,S}(e)\right|^2.$$

Zeigen Sie, dass $H \cap H'$ dann C-quasi-konvex bezüglich S ist, indem Sie wie folgt vorgehen: Sei $h \in H \cap H'$ und sei $\gamma\colon [0, L] \longrightarrow |\operatorname{Cay}(G, S)|$ eine Geodäte von e nach h. Betrachten Sie zu $t \in [0, L]$ mit $\gamma(t) \in G$ die Menge

$$\begin{aligned} M := \bigl\{ g \in G \bigm| {} & \gamma(t) \cdot g \in H \cap H', \text{ und für jedes } k \in G, \\ & \text{das auf einer Geodäte in } |\operatorname{Cay}(G,S)| \text{ von } e \text{ nach } g \text{ liegt}, \\ & \text{gilt } d_S(\gamma(t) \cdot k, H) \leq c \text{ und } d_S(\gamma(t) \cdot k, H') \leq c \bigr\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass M nicht leer ist und dass jedes $d_S(e, \,\cdot\,)$-minimale Element g aus M die Abschätzung $d_S(e, g) \leq C$ erfüllt.

Abgabe bis zum 16. Januar 2015, 10:00 Uhr, in den Briefkasten