Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 13 vom 16. Januar 2015

Aufgabe 1 (Enden von Gruppen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Die Heisenberg-Gruppe hat unendlich viele Enden.
2. Hat eine endlich erzeugte Gruppe exponentielles Wachstum, so hat sie unendlich viele Enden.

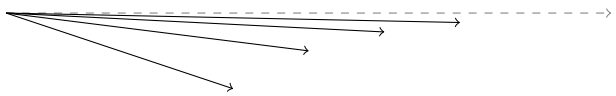
Aufgabe 2 (hyperbolische Produkte?)**.** Charakterisieren Sie durch notwendige und hinreichende Bedingungen, für welche endlich erzeugten Gruppen G und H das Produkt $G \times H$ hyperbolisch ist.

Aufgabe 3 (eine kleine, große Gruppe)**.** Sei $G := \bigl(\bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\bigr) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, wobei $\alpha\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2$ durch Translation der Summanden gegeben ist.

1. Zeigen Sie, dass G endlich erzeugt ist.
2. Zeigen Sie, dass G nicht hyperbolisch ist.
3. Enthält G eine Untergruppe, die zu $\mathbb{Z}^2$ isomorph ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (quasi-geodätische Strahlen in hyperbolischen Räumen)**.** Sei X ein eigentlicher hyperbolischer metrischer Raum. Illustrieren Sie Ihre Argumente jeweils durch geeignete Skizzen!

1. Sei $\gamma\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ eine quasi-isometrische Einbettung. Zeigen Sie, dass es dann eine isometrische Einbettung $\gamma'\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow X$ und ein $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt mit
$$\operatorname{im}\gamma \subset B_c^{X,d}(\operatorname{im}\gamma') \quad \text{und} \quad \operatorname{im}\gamma' \subset B_c^{X,d}(\operatorname{im}\gamma)$$
Hinweis. Im Falle eine Falles beweist Arzelá-Ascoli einfach alles.



2. Sei $x \in X$ und sei $\gamma\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow X$ eine isometrische Einbettung. Zeigen Sie, dass es dann eine isometrische Einbettung $\gamma'\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow X$ gibt mit
$$\gamma'(0) = x \quad \text{und} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} d\bigl(\gamma(t), \gamma'(t)\bigr) < \infty.$$

Bonusaufgabe (freie Untergruppen hyperbolischer Gruppen)**.** Sei G eine hyperbolische Gruppe, seien $g, h \in G$ Elemente unendlicher Ordnung und es gelte $\langle g \rangle_G \cap \langle h \rangle_G = \{e\}$. Zeigen Sie, dass $\langle g, h \rangle_G$ eine freie Gruppe vom Rang 2 ist.
Hinweis. Betrachten Sie die zugehörigen „Achsen“ in G und wenden Sie das Ping-Pong-Lemma auf geeignete Teilmengen von G an.

Abgabe bis zum 23. Januar 2015, 10:00 Uhr, in den Briefkasten