Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 15 vom 30. Januar 2015

Aufgabe 1 (vereinfachte Følner-Bedingung?)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Sei X ein UDBG-Raum und sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge endlicher, nicht-leerer Teilmengen von X mit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\partial_1^X(F_n)|}{|F_n|} = 0.$$
Dann ist X amenabel.

2. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe, sei $S \subset G$ ein endliches Erzeugendensystem und sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge endlicher, nicht-leerer Teilmengen von G mit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\partial_1^{G,d_S}(F_n)|}{|F_n|} = 0.$$
Dann ist G amenabel.

Aufgabe 2 (amenable freie Produkte?)**.** Charakterisieren Sie durch notwendige und hinreichende Bedingungen, für welche endlich erzeugten Gruppen G und H das freie Produkt $G * H$ amenabel ist.
Hinweis. Für welche $m, n \in \mathbb{Z}$ enthält $\mathbb{Z}/m * \mathbb{Z}/n$ eine freie Untergruppe vom Rang 2 ?

Aufgabe 3 (aufgedickte Mengen in nicht-amenablen Räumen)**.** Sei X ein nicht-amenabler UDBG-Raum und sei $E \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Zeigen Sie, dass es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt mit
$$\forall_{F\in P^{\mathrm{fin}}(X)} \quad \left|B_r^X(F)\right| \geq E \cdot |F|.$$

Aufgabe 4 (der Heiratssatz von Hall)**.** Seien W und M nicht-leere Mengen und sei $F\colon W \longrightarrow P^{\mathrm{fin}}(M)$ eine Abbildung, die die *Heiratsbedingung*
$$\forall_{V\in P^{\mathrm{fin}}(W)} \quad \left|\bigcup_{w\in V} F(w)\right| \geq |V|$$
erfüllt. Zeigen Sie, dass es dann eine injektive Abbildung $\mu\colon W \longrightarrow M$ gibt mit
$$\forall_{w\in W} \quad \mu(w) \in F(w).$$

Hinweis. Zeigen Sie die Behauptung zunächst für den Fall, dass W endlich ist; dies lässt sich zum Beispiel durch Induktion über $|W|$ zeigen. Wenden Sie dann das Lemma von Zorn auf geeignet erweiterbare Hochzeiten an um den allgemeinen Fall zu beweisen.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (die Fundamentalklasse in gleichmäßig endlicher Homologie)**.** Sei X ein UDBG-Raum. Die *Fundamentalklasse von X in gleichmäßig endlicher Homologie mit $\mathbb{Z}$- bzw. $\mathbb{R}$-Koeffizienten* ist definiert durch

$$[X]_{\mathbb{Z}} := \left[\sum_{x \in X} 1 \cdot x\right] \in H_0^{\mathrm{uf}}(X;\mathbb{Z}),$$
$$[X]_{\mathbb{R}} := \left[\sum_{x \in X} 1 \cdot x\right] \in H_0^{\mathrm{uf}}(X;\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie: Ist X amenabel, so sind die Klassen $[X]_{\mathbb{Z}}$ und $[X]_{\mathbb{R}}$ nicht-trivial.
Hinweis. Definieren Sie mithilfe einer Følner-Folge von X eine Mittelungsabbildung $H_0^{\mathrm{uf}}(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $H_0^{\mathrm{uf}}(X;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Die folgenden Aufgaben bieten die Gelegenheit, den bisher gelernten Stoff zu wiederholen und zu vertiefen.

Bonusaufgabe (Quasi-Isometrie/Bilipschitz-Äquivalenz)**.**

1. Sind die Gruppen F_{2015} und $\mathbb{Z} \times F_{2015}$ quasi-isometrisch?
2. Sind die Gruppen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2015$ bilipschitz-äquivalent?

Bonusaufgabe (geometrische Strukturen auf Mannigfaltigkeiten)**.**

1. Gibt es eine geschlossene zusammenhängende hyperbolische Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe zu F_{2015} isomorph ist?
2. Gibt es eine geschlossene zusammenhängende flache Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe zu $F_{2015} \times \cdots \times F_{2015}$ isomorph ist?

Bonusaufgabe (amenables Radikal)**.**

1. Zeigen Sie, dass jede Gruppe eine bezüglich Inklusion maximale normale amenable Untergruppe enthält (das sogenannte *amenable Radikal*).
2. Was ist das amenable Radikal von F_{2015} ?

Bonusaufgabe (große symmetrische Gruppen)**.** Sei X eine unendliche Menge. Ist die Symmetriegruppe S_X amenabel?

Keine Abgabe