Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 2 vom 17. Oktober 2014

Aufgabe 1 (Präsentationen von Gruppen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gilt $\langle s, t \mid t^2, tst^{-1} = s^{-1} \rangle \cong \langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle$.
2. Die Gruppe $\langle x, y \mid xy^{2014}x = yx^{2015} \rangle$ ist trivial.

Aufgabe 2 (Baumslag-Solitar-Gruppen)**.** Zu $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ betrachten wir die *Baumslag-Solitar-Gruppe* $\mathrm{BS}(m, n) := \langle a, b \mid ba^m b^{-1} = a^n \rangle$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{BS}(1, 1) \cong \mathbb{Z}^2$ ist (z.B. indem Sie geeignete universelle Eigenschaften vergleichen).
2. Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{BS}(m, n)$ unendlich ist, indem Sie die folgenden Matrizen in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$ betrachten:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{n}{m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3. Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{BS}(m, n)$ *nicht* zyklisch ist.
4. Zeigen Sie, dass
$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{BS}(2,3) &\longrightarrow \mathrm{BS}(2,3) \\ a &\longmapsto a^2 \\ b &\longmapsto b \end{aligned}$$
einen wohldefinierten surjektiven Gruppenhomomorphismus definiert und dass der Kommutator $[bab^{-1}, a]$ ein Element von $\ker \varphi$ repräsentiert.

   Hinweis. Mithilfe einer geeigneten Normalformentheorie kann man damit zeigen, dass der Epimorphismus $\varphi\colon \mathrm{BS}(2,3) \longrightarrow \mathrm{BS}(2,3)$ einen nichttrivialen Kern besitzt. Insbesondere ist $\mathrm{BS}(2,3)$ ein Beispiel einer endlich präsentierten Gruppe, die *nicht* hopfsch ist.

Aufgabe 3 (Die Isometriegruppe von $\mathbb{Z}$)**.** Wir betrachten auf $\mathbb{Z}$ die von der Standardmetrik auf $\mathbb{R}$ induzierte Metrik.

1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Isom}(\mathbb{Z}) \cong \langle s, t \mid t^2, tst^{-1} = s^{-1} \rangle$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Isom}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2$ gilt, wobei $\varphi\colon \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ durch Multiplikation mit -1 gegeben ist.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (universelle Eigenschaft von Erzeugern und Relationen)**.** Sei S eine Menge und sei $R \subset (S \cup S^{-1})^*$.

1. Zeigen Sie, dass die Gruppe $\langle S \mid R \rangle$ zusammen mit der kanonischen Abbildung $\pi\colon S \longrightarrow \langle S \mid R \rangle$ die folgende universelle Eigenschaft besitzt: Für jede Gruppe G und jede Abbildung $\varphi\colon S \longrightarrow G$ mit

$$\forall_{r \in R} \quad \varphi^*(r) = e \in G$$

   gibt es genau einen Homomorphismus $\overline{\varphi}\colon \langle S \mid R \rangle \longrightarrow G$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$; hierbei bezeichnet $\varphi^*\colon (S \cup S^{-1})^* \longrightarrow G$ die kanonische multiplikative Fortsetzung von φ.

2. Formulieren und beweisen Sie die entsprechende Eindeutigkeitsaussage.

Bonusaufgabe (Thompsons Gruppe F)**.** Wir betrachten *Thompsons Gruppe*

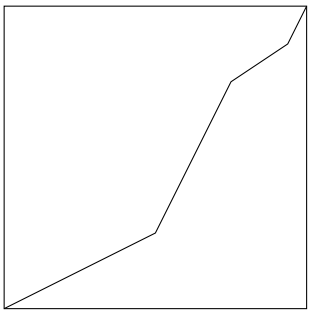
$$F := \left\langle x_0, x_1, \ldots \;\middle|\; \{x_k^{-1} x_n x_k = x_{n+1} \mid k, n \in \mathbb{N}, k < n\} \right\rangle.$$

1. Zeigen Sie, dass

$$F \cong \left\langle a, b \;\middle|\; [ab^{-1}, a^{-1}ba], [ab^{-1}, a^{-2}ba^2] \right\rangle$$

   gilt (insbesondere ist F endlich präsentiert).

2. Schlagen Sie in der Literatur nach, wie *PL-Homöomorphismen* von $[0, 1]$ definiert sind und was Thompsons Gruppe F damit zu tun hat.



Abgabe bis zum 24. Oktober 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten