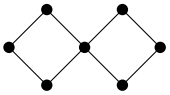
Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

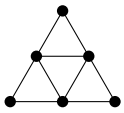
Prof. Dr. C. Löh — Blatt 4 vom 31. Oktober 2014

Aufgabe 1 (freie Operationen auf Graphen?)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gibt eine nicht-triviale Gruppe, die frei auf folgendem Graphen operiert:



2. Es gibt eine nicht-triviale Gruppe, die frei auf folgendem Graphen operiert:



Aufgabe 2 (Charakterisierung endlicher Bäume)**.** Sei $G = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender Graph mit $V \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass G genau dann ein Baum ist, wenn

$$|E| = |V| - 1$$

gilt.

Aufgabe 3 (Operationen endlicher Gruppen auf Bäumen)**.** Zeigen Sie (ohne die Charakterisierung freier Gruppen durch freie Operationen auf Bäumen zu verwenden): Jede Operation einer endlichen Gruppe auf einem (nicht-leeren) Baum besitzt einen globalen Fixpunkt (d.h. einen Knoten oder eine Kante, auf dem/der alle Gruppenelemente trivial wirken). Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Hinweis. Betrachten Sie einen „minimalen“ Orbit eines Knotens und die Wege zwischen den Knoten dieses Orbits.

Aufgabe 4 (Charakterisierung endlicher zyklischer Gruppen)**.**

1. Bestimmen Sie eine Klasse C von Graphen mit folgender Eigenschaft: Eine Gruppe ist genau dann endlich und zyklisch (d.h. von einem Element endlicher Ordnung erzeugt), wenn sie eine freie Operation auf einem Graphen aus der Klasse C besitzt.

2. Gibt es auch für die Menge $\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ von Isomorphietypen von Gruppen eine solche Klasse von Graphen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (Grigorchuk-Gruppe)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur nach, wie die (erste) *Grigorchuk-Gruppe* durch Operationen auf gewissen Bäumen konstruiert wird.

2. Skizzieren Sie den Beweis dafür, dass die (erste) Grigorchuk-Gruppe eine endlich erzeugte unendliche Gruppe ist, deren Elemente alle endliche Ordnung besitzen.

Abgabe bis zum 7. November 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten