Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 5 vom 7. November 2014

Aufgabe 1 (Operationen und Bäume)**.** Sei F eine freie Gruppe vom Rang 2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Operiert F frei auf einem Graphen, so ist dieser Graph bereits ein Wald.
2. Operiert F auf einem Graphen, so sind alle Spannbäume dieser Operation isomorph.

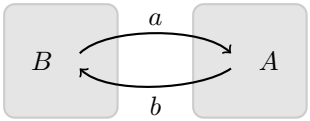
Aufgabe 2 (freie Untegruppen)**.** Sei F eine freie Gruppe vom Rang mindestens 2 und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass F eine normale freie Untergruppe vom Rang mindestens n enthält.

Aufgabe 3 (Ping-Pong?)**.** Sei G eine Gruppe, die von den Elementen a, b erzeugt wird. Es sei eine Operation von G auf einer Menge X gegeben und sei $X = A \sqcup B$, wobei A und B nicht-leer sind; dabei gelte

$$a \cdot B \subset A \qquad \text{und} \qquad b \cdot A \subset B.$$

1. Seien a und b Elemente unendlicher Ordnung. Ist G dann frei vom Rang 2 ?
2. Seien a und b Elemente der Ordnung 2. Ist G dann isomorph zu $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort und illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!



Aufgabe 4 (freie Gruppen und $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$)**.** Sei

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

und sei $F := \langle \{a, b\} \rangle_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$ die von a und b erzeugte Untergruppe von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$; diese Gruppe ist frei vom Rang 2 (nach dem Ping-Pong-Lemma). Außerdem betrachten wir die Untergruppen

$$F' := \left\{ \begin{pmatrix} 4m+1 & 2r \\ 2s & 4n+1 \end{pmatrix} \;\middle|\; m, n, r, s \in \mathbb{Z},\ \det \begin{pmatrix} 4m+1 & 2r \\ 2s & 4n+1 \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 2m+1 & 2r \\ 2s & 2n+1 \end{pmatrix} \;\middle|\; m, n, r, s \in \mathbb{Z},\ \det \begin{pmatrix} 2m+1 & 2r \\ 2s & 2n+1 \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

1. Zeigen Sie, dass $[G : F'] < \infty$ und $[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : G] < \infty$.
   Bonusaufgabe. Zeigen Sie, dass $[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : F'] = 12$.
2. Zeigen Sie, dass $F = F'$ ist.

   Hinweis. Betrachten Sie für die Inklusion $F' \subset F$ zunächst den Fall „$n = 0$“ und machen Sie dann vollständige Induktion über „$|n| + |m|$.“

Bitte wenden

Bonusaufgabe (freie Rotationsgruppen)**.** Zeigen Sie, dass SO(3) eine freie Gruppe vom Rang 2 als Untergruppe enthält.

Hinweis. Betrachten Sie

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

und Teilbarkeit durch 5 in $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$.

Abgabe bis zum 14. November 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten