Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 6 vom 14. November 2014

Aufgabe 1 (Quasi-Isometrie metrischer Räume)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Die metrischen Räume $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ (bzgl. der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik) sind quasi-isometrisch.
2. Die metrischen Räume $\mathbb{Z}$ und $\{n^3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (bzgl. der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik) sind quasi-isometrisch.

Aufgabe 2 (Vererbungseigenschaften von quasi-isometrischen Einbettungen)**.** Seien X und Y metrische Räume und seien $f, f' \colon X \longrightarrow Y$ Abbildungen, die endlichen Abstand voneinander haben. Bearbeiten Sie zwei der folgenden vier Aufgaben:

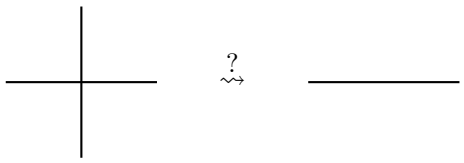
1. Zeigen Sie: Ist f eine quasi-isometrische Einbettung, so ist auch f' eine quasi-isometrische Einbettung.
2. Sei Z ein metrischer Raum und sei $g \colon Y \longrightarrow Z$ eine quasi-isometrische Einbettung. Zeigen Sie, dass dann auch $g \circ f$ und $g \circ f'$ endlichen Abstand voneinander haben.
3. Gilt die letzte Aussage auch dann, wenn g keine quasi-isometrische Einbettung ist? Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Zeigen Sie: Ist f eine Quasi-Isometrie, so ist auch f' eine Quasi-Isometrie.

Aufgabe 3 (Quasi-Isometrie vs. Bilipschitz-Äquivalenz)**.**

1. Zeigen Sie, dass bijektive Quasi-Isometrien zwischen endlich erzeugten Gruppen bereits Bilipschitz-Äquivalenzen sind.
2. Gilt dies auch für allgemeine metrische Räume? D.h. ist jede bijektive Quasi-Isometrie zwischen metrischen Räumen bereits eine Bilipschitz-Äquivalenz? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (Quasi-Isometrie von Gruppen)**.** Sei $X := (\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Z}) \subset \mathbb{R}^2$ mit der von der ℓ^1-Metrik auf $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik. Illustrieren Sie Ihre Argumente jeweils durch geeignete Skizzen!

1. Zeigen Sie, dass jede quasi-isometrische Einbettung $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ bereits eine Quasi-Isometrie ist.
2. Zeigen Sie, dass es *keine* quasi-isometrische Einbettung $X \longrightarrow \mathbb{Z}$ gibt.



3. Folgern Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^n$ *nicht* quasi-isometrisch.
4. Folgern Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sind $\mathbb{Z}$ und F_n *nicht* quasi-isometrisch.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (gleichmäßig endliche Homologie)**.** Sei R ein normierter Ring (z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Z}$). Sei X ein UDBG-Raum und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann schreiben wir $C_n^{\mathrm{uf}}(X;R)$ für den R-Modul aller beschränkten Funktionen $c\colon X^{n+1} \longrightarrow R$ mit folgender Kleinheitseigenschaft: Es gibt eine Konstante $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\forall_{x \in X^{n+1}} \quad \max\bigl\{d(x_j, x_k) \bigm| j,k \in \{0,\dots,n\}\bigr\} \geq r \Longrightarrow c(x) = 0.$$

Man nennt die Elemente von $C_n^{\mathrm{uf}}(X;R)$ *gleichmäßig endliche Ketten von X mit Koeffizienten in R* und schreibt solche Funktionen $c\colon X^{n+1} \longrightarrow R$ auch als formale Summen der Form $\sum_{x \in X^{n+1}} c(x) \cdot x$.

1. Schlagen Sie in der Literatur nach, was ein UDBG-Raum (*uniformly discrete space of bounded geomety*) ist.

2. Zeigen Sie: Ist X ein UDBG-Raum und $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so beschreibt

$$\begin{aligned} \partial_n\colon C_n^{\mathrm{uf}}(X;R) &\longrightarrow C_{n-1}^{\mathrm{uf}}(X;R) \\ \sum_{x \in X^{n+1}} c_x \cdot x &\longmapsto \sum_{x \in X^{n+1}} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot c_x \cdot (x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

   eine wohldefinierte Abbildung und es gilt $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Außerdem definiert man $\partial_0 := 0$. D.h. $C^{\mathrm{uf}}(X;R)$ ist bezüglich ∂ ein Kettenkomplex.

3. Zeigen Sie: Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine quasi-isometrische Einbettung von UDBG-Räumen und $n \in \mathbb{N}$, so beschreibt

$$\begin{aligned} C_n^{\mathrm{uf}}(f;R)\colon C_n^{\mathrm{uf}}(X;R) &\longrightarrow C_n^{\mathrm{uf}}(Y;R) \\ \sum_{x \in X^{n+1}} c_x \cdot x &\longmapsto \sum_{x \in X^{n+1}} c_f \cdot \bigl(f(x_0), \dots, f(x_n)\bigr) \end{aligned}$$

   eine wohldefinierte Abbildung mit $\partial_n \circ C_{n+1}^{\mathrm{uf}}(f;R) = C_n^{\mathrm{uf}}(f;R) \circ \partial_{n+1}$. D.h. $C^{\mathrm{uf}}(f;R)\colon C^{\mathrm{uf}}(X;R) \longrightarrow C^{\mathrm{uf}}(Y;R)$ ist eine Kettenabbildung.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$; sind X und Y UDBG-Räume und ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine quasi-isometrische Einbettung, so definieren wir

$$H_n^{\mathrm{uf}}(X;R) := \frac{\ker(\partial_n\colon C_n^{\mathrm{uf}}(X;R) \to C_{n-1}^{\mathrm{uf}}(X;R))}{\mathrm{im}(\partial_{n+1}\colon C_{n+1}^{\mathrm{uf}}(X;R) \to C_n^{\mathrm{uf}}(X;R))}$$

   und

$$\begin{aligned} H_n^{\mathrm{uf}}(f;R)\colon H_n^{\mathrm{uf}}(X;R) &\longrightarrow H_n^{\mathrm{uf}}(Y;R) \\ [c] &\longmapsto \bigl[C_n^{\mathrm{uf}}(f;R)(c)\bigr]. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass $H_n^{\mathrm{uf}}(\,\cdot\,;R)$ einen wohldefinierten Funktor $\mathsf{QMet} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ definiert. Insbesondere folgt: Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Quasi-Isometrie von UDBG-Räumen, so ist $H_n^{\mathrm{uf}}(f;R)\colon H_n^{\mathrm{uf}}(X;R) \longrightarrow H_n^{\mathrm{uf}}(Y;R)$ ein Isomorphismus. Man bezeichnet die Funktoren $H^{\mathrm{uf}}(\,\cdot\,;R)$ als *gleichmäßig endliche Homologie mit R-Koeffizienten.*

Abgabe bis zum 21. November 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten