Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 7 vom 21. November 2014

Aufgabe 1 (Quasi-Isometrie-Invarianz von „(quasi-)geodätisch“?)**.** Seien X und Y metrische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Quasi-Isometrie. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist X geodätisch, so ist auch Y geodätisch.
2. Ist X quasi-geodätisch, so ist auch Y quasi-geodätisch.

Aufgabe 2 (Schweizer ~~Käse~~ $\mathbb{R}^2$)**.** Wir betrachten $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit der von der Standardmetrik von $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik.

1. Zeigen Sie, dass X *nicht* geodätisch ist.
2. Zeigen Sie, dass X für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $(1, \varepsilon)$-quasi-geodätischer metrischer Raum ist.

Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Aufgabe 3 (Kommensurabilität)**.**

1. Zeigen Sie: Ist G eine Gruppe und haben die Untergruppen H und K endlichen Index in G, so hat auch $H \cap K$ endlichen Index in G.
2. Folgern Sie, dass Kommensurabilität eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der Gruppen bildet.

Aufgabe 4 (quasi-geodätisch $\rightsquigarrow$ geodätisch)**.** Lesen Sie Anhang A.3 des Skripts über geometrische Realisierung von Graphen und überzeugen Sie sich davon, dass die geometrische Realisierung eines zusammenhängenden Graphen ein geodätischer metrischer Raum ist.

1. Sei $X = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung $V \longrightarrow |X|$ eine Quasi-Isometrie ist (wobei wir auf V die zum Graphen X assoziierte Metrik betrachten).
2. Sei X ein quasi-geodätischer metrischer Raum. Zeigen Sie, dass X zu einem geodätischen metrischen Raum quasi-isometrisch ist.

   Hinweis. Konstruieren Sie aus X einen Graphen Y mit Knotenmenge X, wobei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie „nahe genug“ beieinander liegen. Zeigen Sie dann, dass die kanonische Abbildung $X \longrightarrow |Y|$ eine Quasi-Isometrie ist.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Möbiustransformationen und $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$)**.** Die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ operiert durch Möbiustransformationen, d.h. via

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \times H &\longrightarrow H \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) &\longmapsto \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}, \end{aligned}$$

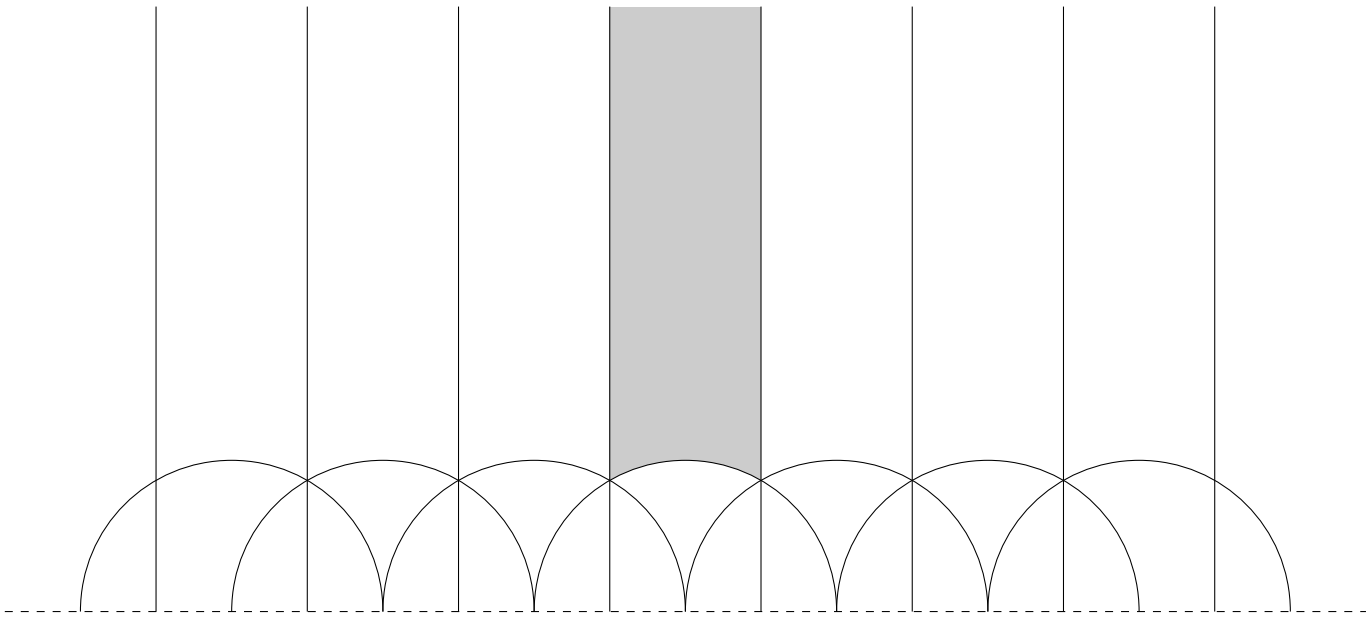
auf der oberen Halbebene $H := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(z) > 0 \right\} \subset \mathbb{C}$.

1. Sei $D := \left\{ z \in H \;\middle|\; |z| \geq 1 \text{ und } |\operatorname{Re} z| \leq 1/2 \right\}$. Zeigen Sie, dass

   $$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \cdot D = H$$

   ist. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

2. Zeigen Sie, dass diese Operation (bezüglich der von der Standardtopologie auf $\mathbb{C}$ induzierten Topologie) *nicht* kokompakt ist.



Abgabe bis zum 28. November 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten