Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 8 vom 28. November 2014

Aufgabe 1 (geometrische Eigenschaften von Gruppen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Die Eigenschaft „unendlich und torsionsfrei“ ist eine geometrische Eigenschaft von Gruppen.
2. Die Eigenschaft „enthält eine Untergruppe von endlichem Index, die zu einem freien Produkt zweier nicht-trivialer Gruppen isomorph ist“ ist eine geometrische Eigenschaft von Gruppen.

Aufgabe 2 (mengentheoretische Kopplungen und endliche Erzeugtheit)**.** Seien G und H Gruppen und es gebe eine mengentheoretische Kopplung zwischen G und H. Zeigen Sie: Ist G endlich erzeugt, so ist auch H endlich erzeugt.

Aufgabe 3 (Maß-Äquivalenz von Gruppen)**.** Schlagen Sie in der Literatur nach, wie *Maß-Äquivalenz* von abzählbaren Gruppen definiert ist. Erklären Sie dabei die auftretenden Begriffe und vergleichen Sie die Definition mit dem dynamischen Kriterium für Quasi-Isometrie.

Aufgabe 4 (die dreidimensionale Heisenberggruppe)**.** Sei $H_{\mathbb{R}}$ die *reelle Heisenberggruppe* und $H \subset H_{\mathbb{R}}$ die *Heisenberggruppe* (jeweils bezüglich Matrixmultiplikation):

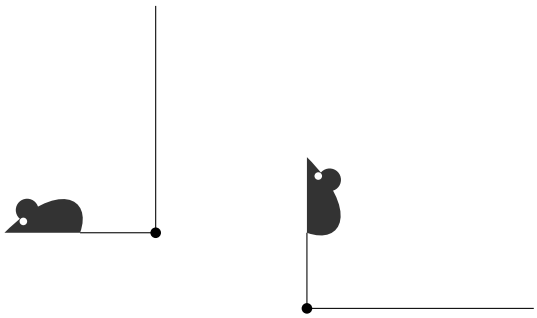
$$H_{\mathbb{R}} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; x,\ y,\ z \in \mathbb{R} \right\}, \qquad H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; x,\ y,\ z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Wir versehen $H_{\mathbb{R}}$ mit der Topologie, die durch Konvergenz aller Matrizenkoeffizienten gegeben ist.

1. Zeigen Sie, dass $H_{\mathbb{R}}$ bezüglich dieser Topologie eine lokalkompakte topologische Gruppe ist.
2. Zeigen Sie, dass die Untergruppe H ein kokompaktes Gitter in $H_{\mathbb{R}}$ ist.

Bonusaufgabe (Rattenschwänze)**.** Wir betrachten auf F_2 eine Wortmetrik bezüglich eines endlichen Erzeugendensystems. Zeigen Sie, dass

$$H_0^{\mathrm{uf}}(F_2;\mathbb{R}) \cong 0 \qquad \text{und} \qquad H_0^{\mathrm{uf}}(F_2;\mathbb{Z}) \cong 0.$$



Abgabe bis zum 5. Dezember 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten