Übungen zur Geometrischen Gruppentheorie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 9 vom 5. Dezember 2014

Aufgabe 1 (Bälle in abelschen Gruppen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gibt ein endliches Erzeugendensystem $S \subset \mathbb{Z}^2$ mit
$$\left|B_{42}^{\mathbb{Z}^2,S}(0)\right| = 2014.$$
2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein endliches Erzeugendensystem $S \subset \mathbb{Z}^n$ mit: Für alle $r \in \mathbb{N}$ ist
$$B_r^{\mathbb{Z}^n,S}(0) = \{-r, \dots, r\}^n.$$

Aufgabe 2 (Grundlegende Eigenschaften von Wachstumsfunktionen)**.** Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und sei $S \subset G$ ein endliches Erzeugendensystem.

1. Zeigen Sie, dass die Wachstumsfunktion $\beta_{G,S}$ submultiplikativ ist:
$$\forall_{r,r' \in \mathbb{N}} \quad \beta_{G,S}(r + r') \leq \beta_{G,S}(r) \cdot \beta_{G,S}(r').$$
2. Zeigen Sie: Ist G unendlich, so ist $\beta_{G,S}$ streng monoton wachsend.

Aufgabe 3 (Exponentielle verallgemeinerte Wachstumsfunktionen)**.**

1. Zeigen Sie, dass für alle a, $a' \in \mathbb{R}_{>1}$ gilt, dass $(x \mapsto a^x) \sim (x \mapsto a'^x)$.
2. Sei $a \in \mathbb{R}_{>1}$ und sei $a' \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass $(x \mapsto a^x) \succ (x \mapsto x^{a'})$.
3. Sei $a \in \mathbb{R}_{>1}$ und sei $a' \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass $(x \mapsto a^x) \not\prec (x \mapsto x^{a'})$.
4. Geben Sie eine verallgemeinerte Wachstumsfunktion $f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ an mit: $f \prec (x \mapsto e^x)$, $f \not\sim (x \mapsto e^x)$, und $(x \mapsto x^a) \prec f$ für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 4 (Wachstumstyp der Heisenberggruppe)**.** Sei $H \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ die Heisenberggruppe. Bearbeiten Sie zwei der folgenden Aufgaben:

0. Zeigen Sie, dass $H \cong \langle x, y, z \mid [x, z], [y, z], [x, y] = z \rangle$.

Wir schreiben $S := \{x, y, z\} \subset H$. Seien außerdem m, n, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Zeigen Sie, dass $d_S(x^m \cdot y^n \cdot z^k, e) \leq |m| + |n| + 6 \cdot \sqrt{|k|}$.
2. Zeigen Sie, dass $|m| + |n| \leq d_S(x^m \cdot y^n \cdot z^k, e)$ und $|k| \leq d_S(x^m \cdot y^n \cdot z^k, e)^2$.
3. Zeigen Sie, dass $1/2 \cdot (|m| + |n| + \sqrt{|k|}) \leq d_S(x^m \cdot y^n \cdot z^k, e)$.
4. Folgern Sie, dass die Wachstumsfunktion $\beta_{H,S}$ zu einem Polynom vom Grad 4 quasi-äquivalent ist.

Bitte wenden

Ein wichtiges Optimierungsproblem unter Nikoläusen ist es, Säcke mit kleinem Rand und großem Volumen zu finden. Eine endlich erzeugte Gruppe G ist eine *Nikolausgruppe bezüglich des endlichen Erzeugendensystems* $S \subset G$, wenn es zu jedem $r \in \mathbb{N}_{>0}$ und jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine endliche Teilmenge $F \subset G$ mit

$$\frac{|\partial_r^{G,S} F|}{|F|} \leq \varepsilon$$

gibt; dabei ist $\partial_r^{G,S} F := \big\{ g \in G \setminus F \;\big|\; \exists_{f \in F} \quad d_S(g,f) \leq r \big\}$.

Bonusaufgabe (Untergruppen von Nikolausgruppen)**.**

1. Zeigen Sie: Sind S und T endliche Erzeugendensysteme einer Gruppe G und ist G eine Nikolausgruppe bezüglich S, so ist G auch eine Nikolausgruppe bezüglich T. Wir sprechen daher auch einfach von *Nikolausgruppen* (ohne das endliche Erzeugendensystem zu erwähnen).

2. Zeigen Sie: Ist G eine endlich erzeugte Nikolausgruppe und ist $H \subset G$ eine endlich erzeugte Untergruppe, so ist auch H eine Nikolausgruppe.

Bonusaufgabe (Nikolausgruppen sind geometrisch)**.** Zeigen Sie, dass die Eigenschaft eine Nikolausgruppe zu sein geometrisch ist.

Bonusaufgabe (Nikolausgruppen und Wachstum)**.** Zeigen Sie, dass endlich erzeugte Gruppen von subexponentiellem Wachstum Nikolausgruppen sind.

Bonusaufgabe (Nikolausgruppen und Schneeflocken)**.** Sei G eine Gruppe. Ein *G-invariantes Mittel* ist eine lineare Abbildung $m \colon \ell^\infty(G;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- *Normiertheit.* Es ist $m(1) = 1$.
- *Positivität.* Für alle $f \in \ell^\infty(G;\mathbb{R})$ gilt:
$$\big(\forall_{g \in G} \quad f(g) \geq 0\big) \Longrightarrow m(f) \geq 0.$$
- *Invarianz.* Für alle $g \in G$ und alle $f \in \ell^\infty(G;\mathbb{R})$ gilt
$$m(f) = m\big(h \mapsto f(g^{-1} \cdot h)\big).$$

1. Schlagen Sie in der Literatur nach, was ein Ultrafilter bzw. ein Grenzwert entlang eines Ultrafilters ist.

2. Zeigen Sie, dass jede Nikolausgruppe G ein G-invariantes Mittel besitzt.

3. Zeigen Sie, dass die Schneeflockengruppe F_2 *kein* F_2-invariantes Mittel besitzt.

   Hinweis. Vergleichen Sie dies mit Aufgabe 4 von Blatt 3.

4. Folgern Sie, dass Gruppen, die zu F_2 isomorphe Untergruppen besitzen, *keine* Nikolausgruppen sind.

Abgabe bis zum 12. Dezember 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten