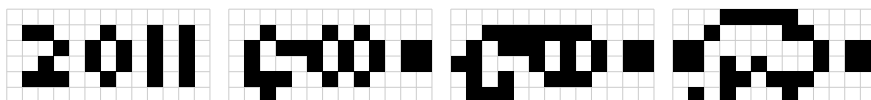


Seminar/Hauptseminar „Gruppen, Automaten und Conways Game of Life“

C. Löh (clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de)

Juli 2011

Ein bekanntes Beispiel eines zellulären Automaten ist Conways Game of Life – dabei wird die Entwicklung eines Organismus in der Ebene durch Zellen im Quadratgitter modelliert, indem ausgehend von einer Startkonfiguration nach festen Regeln Zellen überleben, sterben bzw. neu entstehen:



Eine naheliegende Frage für solche Systeme ist z.B., ob es unerreichbare Konfigurationen gibt.

In diesem Seminar werden wir Automaten dieser Art systematisch im Kontext der Gruppentheorie untersuchen; insbesondere werden wir auf den Zusammenhang mit sogenannten amenablen Gruppen eingehen, den Satz vom Garten Eden beweisen, und bestimmte algebraische Probleme (z.B. die Kaplansky-Vermutung) durch geeignete zelluläre Automaten beschreiben/interpretieren.

Themen

Als Grundlage für das Seminar werden wir im wesentlichen das Buch *Cellular Automata and Groups* von T. Ceccherini-Silberstein und M. Coornaert verwenden.

Falls Sie daran interessiert sind, im Zusammenhang mit diesem Seminar eine Abschlussarbeit zu schreiben, geben Sie mir bitte möglichst bald Bescheid.

Zelluläre Automaten

Vortrag 1 (Zelluläre Automaten und Conways Game of Life). Definition zellulärer Automaten, prodiskrete Topologie, Conways Game of Life, der diskrete Laplace-Operator, minimale Speichermengen.

Literatur: [2, Kapitel 1.1–1.5]

Vortrag 2 (Invertierbare Automaten). Der Satz von Curtis-Hedlund, die prodiskrete uniforme Struktur, Charakterisierung invertierbarer zellulärer Automaten.

Literatur: [2, Kapitel 1.8–1.10]

Surjunktive Gruppen

Vortrag 3 (Surjunktive Gruppen). Definition surjunktiver Gruppen, Beispiel: endliche Gruppen, Vererbungseigenschaften surjunktiver Gruppen.

Literatur: [2, Kapitel 3.1, 1.6, 1.7, 3.2]

Vortrag 4 (Residuell endliche Gruppen). Definition residuell endlicher Gruppen, Beispiele (nicht) residuell endlicher Gruppen (insbesondere freie Gruppen (kurze Einführung)), residuell endliche Gruppen sind surjektiv

Literatur: [2, Kapitel 2.1–2.4, 3.3, Anhang D], [4, Kapitel 2.2.2, 3.3.1]

Vortrag 5 (Die Grigorchuk-Gruppe). Das Burnside-Problem, Konstruktion der Grigorchuk-Gruppe (inkl. Automat), die Grigorchuk-Gruppe ist eine endlich erzeugte unendliche Torsionsgruppe, die Grigorchuk-Gruppe ist residuell endlich.

Literatur: [2, Kapitel 6.9], [3, Abschnitt VIII.10.(iii), VIII.19]

Vortrag 6 (Amenable Gruppen). Definition amenabler Gruppen via Følner-Mengen, Ränder, Beispiele und Vererbungseigenschaften amenabler Gruppen.

Literatur: [2, Kapitel 4.7, 5.4, 4.4, 4.5, (4.9)]

Vortrag 7 (Sofische Gruppen). Hamming-Metrik, Definition sofischer Gruppen, Beispiele und Vererbungseigenschaften, amenable Gruppen und freie Gruppen sind sofisch.

Literatur: [2, Kapitel 7.4, 7.5]

Vortrag 8 (Sofische Gruppen sind surjektiv). Cayley-Graphen (kurze Einführung), Charakterisierung von sofischen Gruppen durch Approximation ihrer Cayley-Graphen, sofische Gruppen sind surjektiv.

Literatur: [2, Kapitel 6.3, 7.7, 7.8], [4, Kapitel 3]

Der Satz vom Garten Eden

Vortrag 9 (Formulierung des Satzes vom Garten Eden). Garten-Eden-Muster, prä-injektive Abbildungen, Formulierung des Satzes vom Garten Eden, Garten-Eden-Muster für Conways Game of Life.

Literatur: [2, Kapitel 5.1–5.3, 5.13]

Vortrag 10 (Entropie). Definition von Entropie (und Zusammenhang mit anderen mathematischen Entropiebegriffen), erste Abschätzungen, Zerlegungen, Abschätzung der Entropie via Zerlegungen.

Literatur: [2, Kapitel 5.6, 5.7], [7, Kapitel 5.1]

Vortrag 11 (Beweis des Satzes vom Garten Eden). Beweis des Satzes vom Garten Eden, die freie Gruppe vom Rang 2 und der Satz vom Garten Eden.

Literatur: [2, Kapitel 5.8, 5.10, 5.11, (5.12)]

Lineare zelluläre Automaten

Vortrag 12 (Die Algebra der linearen zellulären Automaten). Lineare zelluläre Automaten, Gruppenringe und -algebren, algebraische Beschreibung linearer zellulärer Automaten.

Literatur: [2, Kapitel 8.1–8.5]

Vortrag 13 (Der Satz vom Garten Eden für lineare zelluläre Automaten). Der Satz vom Garten Eden für lineare zelluläre Automaten (inklusive Beweis).

Literatur: [2, Kapitel 8.8, 8.9, (8.10), (8.11)]

Vortrag 14 (Die Kaplansky-Vermutung). Kaplansky-Vermutung, Nullteilerfreiheit des Gruppenrings für angeordnete Gruppen, Charakterisierung der Nullteilerfreiheit des Gruppenrings über zelluläre Automaten.

Literatur: [2, Kapitel 8.16], [6, Kapitel 13]

Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnahme im Seminar (stellen Sie Fragen während der Vorträge, wenn Sie etwas nicht verstehen!).
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muß bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag abgegeben werden.
- Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen.
- Die Seminarleistungen werden wie in den entsprechenden Prüfungsordnungen benotet und angerechnet.

Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung (am besten vor Beginn des Semesters) und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Grundvoraussetzung für einen Seminarvortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.
- Geben Sie zu Beginn einen kurzen Überblick über Ihren Vortrag. Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.
- Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie die Zuhörer nicht durch zuviele technische Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.
- Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.
- Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.

- Seien Sie der Literatur gegenüber kritisch. Sie sollten auch versuchen, selbst geeignete ergänzende Literatur zu finden. Geeignete Ausgangspunkte sind zum Beispiel:

<http://books.google.com>
<http://www.ams.org/mathscinet>
<http://www.springerlink.com>

- Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probevortrag kann helfen den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.
- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Vortragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt. Überlegen Sie, welche Begriffe/Aussagen aus den vorherigen Vorträgen Sie nochmal kurz wiederholen sollten.
- Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem \LaTeX besser kennenzulernen [5]; dafür werden auch \LaTeX -Vorlagen zur Verfügung gestellt:
http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/lifesem_ws1112/
- Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

Hinweise zum Halten des Vortrags

- Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.
- Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind.
- Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.
- Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.
- Sprechen Sie laut und deutlich.
- Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.

- Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?
- Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

Literatur

- [1] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.
Ein nettes Büchlein, das dabei hilft, mathematisch sauber und verständlich zu formulieren.
- [2] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert. *Cellular Automata and Groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2010.
- [3] P. de la Harpe. *Topics in Geometric Group Theory*, Chicago University Press, 2000.
- [4] C. Löh. *Geometric group theory, an introduction*, Skript zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“ im WS 2010/11, Universität Regensburg, http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt_ws1011/lecture_notes.pdf
- [5] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The L^AT_EX Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.
Eines der Standardwerke zur Benutzung von L^AT_EX; weitere Unterstützung finden Sie unter <http://www.ctan.org/starter.html>
- [6] D.S. Passman. *The algebraic structure of group rings*, John Wiley & Sons, 1978.
- [7] K.E. Petersen. *Ergodic Theory*, Cambridge University Press, 1989.
- [8] T. Tantau. *The TikZ and PGF Packages*, <http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf>
Dokumentation des TikZ-Pakets für L^AT_EX, das es erlaubt, auf einfache Weise Graphiken in L^AT_EX zu erstellen.