Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 10 vom 22. Dezember 2016

Aufgabe 1 (Isomorphismen)**.** Sei K ein Körper und $f\colon V \longrightarrow W$, $g\colon W \longrightarrow X$ seien lineare Abbildungen von K-Vektorräumen. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Sind f und g Isomorphismen, so auch $g \circ f$.
2. Ist $g \circ f$ ein Isomorphismus, so auch f und g.

Aufgabe 2 (Invarianz der Dimension)**.** Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Zeigen Sie, dass dann folgendes gilt:

$$\dim_K V = \dim_K W \iff V \cong_K W.$$

Aufgabe 3 (komplementäre Untervektorräume und Quotienten)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien $U, W \subset V$ komplementäre Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass dann

$$\begin{aligned} \pi_U|_W \colon W &\longrightarrow V/U \\ w &\longmapsto w + U \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

Aufgabe 4 (magische Quadrate)**.** Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Ein *magisches Quadrat über K der Kantenlänge n* ist ein $n \times n$-Quadrat mit Einträgen aus K und folgender Eigenschaft: Es gibt ein $m \in K$ (die *magische Zahl*) mit:

- In jeder Zeile ist die Summe der Elemente m.
- In jeder Spalte ist die Summe der Elemente m.
- In der Haupt- bzw. Antidiagonalen ist jeweils die Summe m.

Zum Beispiel ist

2	0	1	6
6	1	0	2
0	2	6	1
1	6	2	0

ein magisches Quadrat über $\mathbb{Q}$ der Kantenlänge 4 mit magischer Zahl 9. Sei $\mathrm{MQ}_n(K)$ die Menge aller magischen Quadrate über K mit Kantenlänge n und magischer Zahl 0.

1. Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathrm{MQ}_2(\mathbb{R})$.
2. Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathrm{MQ}_2(\mathbb{F}_2)$.
3. Zeigen Sie, dass $\mathrm{MQ}_n(K)$ bezüglich kästchenweiser Addition bzw. Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum bildet.

   Hinweis. Falls Sie nicht rechnen möchten: Man kann $\mathrm{MQ}_n(K)$ als Kern einer geeigneten linearen Abbildung schreiben.
4. Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{MQ}_3(\mathbb{R}) = 2$ ist.

   Hinweis. Bestimmen Sie den Rang der linearen Abbildung aus dem vorigen Teil und verwenden Sie die Dimensionsformel …

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Eilenberg-Schwindel). In Professor Pirkheimers Nachlass finden sich unzählige Akten. Pirkheimers Ordnungsdrang hat ihn dazu verleitet, die Akten als Vektorraum zu organisieren. Sehr zum Ärgernis seiner Nachlassverwalter hat er es geschafft, einen nicht-trivialen Vektorraum zu verwenden, der doppelt so groß ist wie er selbst („Sonst hat man ja nie genug Platz für all die wichtigen Notizen!“). Zeigen Sie, dass es zu jedem Körper K tatsächlich einen Vektorraum V mit $V \ncong_K \{0\}$ und

$$V \cong_K V \oplus V$$

gibt!

Die folgenden Aufgaben bieten die Gelegenheit, den bisher gelernten Stoff zu Vektorräumen und linearen Abbildungen wiederholen und zu vertiefen; für jede dieser Aufgaben können Sie bis zu vier Zusatzpunkte bekommen.

Bonusaufgabe (Lösungsmengen). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
2. Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \cdot x_2 = x_3\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
3. Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = {x_1}^2\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.
4. Die Menge $\{x \in {\mathbb{F}_2}^2 \mid x_2 = {x_1}^2\}$ ist ein Untervektorraum von ${\mathbb{F}_2}^2$.

Bonusaufgabe (lineare Unabbhängigkeit). Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_2$ bilden die folgenden Vektoren in ${\mathbb{F}_2}^3$ eine linear unabhängige Familie?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda + 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (Invertierbarkeit). Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und sei $f \colon K^n \longrightarrow K^n$ linear. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die Abbildung $f \colon K^n \longrightarrow K^n$ ist ein Isomorphismus.
2. Die Matrix $M(f) \in M_{n \times n}(K)$ ist invertierbar.

Hinweis. Eine Matrix $A \in M_{n \times n}(K)$ heißt *invertierbar*, wenn es eine Matrix $B \in M_{n \times n}(K)$ mit $A \cdot B = I_n$ und $B \cdot A = I_n$ gibt.

Bonusaufgabe (Doppeldual). Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow (V^*)^* \\ v &\longmapsto \bigl(f \mapsto f(v)\bigr) \end{aligned}$$

linear und injektiv ist.

Noch eine Seite!

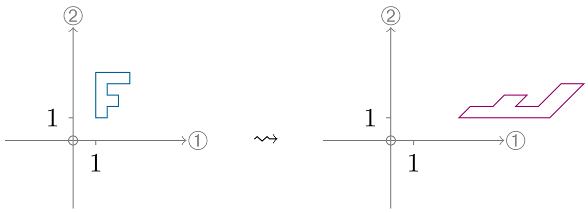
Bonusaufgabe (FerwandlunX)**.** Schreiben Sie ein LaTeX-Makro \Ferwandlung mit vier Argumenten und folgender Eigenschaft: Der Aufruf

$$\backslash\mathsf{Ferwandlung}\{a\}\{b\}\{c\}\{d\}$$

stellt den Effekt der linearen Abbildung

$$L\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

auf den Buchstaben „F“ graphisch dar und zeigt auch noch die entsprechende Gleichung an. Zum Beispiel liefert dann \Ferwandlung{1}{2}{1}{0} so etwas wie



$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2 \cdot x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x \end{aligned}$$

Drucken Sie auch das Ergebnis der folgenden Aufrufe aus:

- \Ferwandlung{0}{1}{2}{0}
- \Ferwandlung{1}{−1}{0}{1}
- \Ferwandlung{0}{0}{1}{1}
- \Ferwandlung{1}{2}{2}{1}

Hinweis. Bei Graphiken in LaTeX hilft z.B. das Paket tikz.

Bonusaufgabe (Skript)**.** Finden Sie so viele Fehler im Skript wie möglich!

Abgabe bis zum 12. Januar 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Frohe Weihnachten und ein Gutes Neues Jahr!