Übungen zur Linearen Algebra I

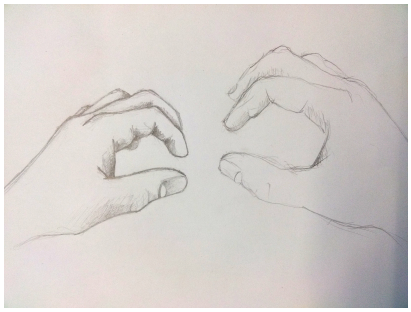
Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 13 vom 26. Januar 2017

Aufgabe 1 (Eigenwerte und Eigenvektoren)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, so ist $2017 \cdot \lambda$ ein Eigenwert von $2017 \cdot A$.
2. Sind v und w Eigenvektoren von A, so ist $v + w$ ein Eigenvektor von A.

Aufgabe 2 (Orientierungen)**.** Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $n := \dim_{\mathbb{R}} V > 0$. Wir definieren wie folgt eine Relation „$\sim$“ auf der Menge der Basen von V: Sind B und C Basen von V, so gelte genau dann $B \sim C$, wenn $\det(T_{B,C}) > 0$ ist.

1. Zeigen Sie, dass „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklassen von Basen von V bezüglich „$\sim$“ bezeichnet man als *Orientierungen von V*.
2. Zeigen Sie, dass die Basen
$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$
verschiedene Orientierungen von $\mathbb{R}^3$ repräsentieren.
3. Was hat der zweite Teil mit der linken bzw. rechten Hand zu tun? Illustrieren Sie Ihre Antwort geeignet!
4. Zeigen Sie, dass V genau zwei Orientierungen besitzt.



Aufgabe 3 (Determinanten von Blockmatrizen)**.** Sei K ein Körper, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $A \in M_{n_1\times n_1}(K)$, $B \in M_{n_1\times n_2}(K)$, $D \in M_{n_2\times n_2}(K)$. Zeigen Sie, dass
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D.$$
Dabei ist die linke Matrix in $M_{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}(K)$ wie angegeben aus den Blöcken A, B, D zusammengesetzt.

Hinweis. Viele Wege führen nach Rom! Naheliegende Möglichkeiten sind Entwicklung nach der ersten Spalte und Induktion über n_1 oder die axiomatische Beschreibung der Determinante, angewendet auf eine geeignete Funktion.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Fibonacci-Zahlen, explizit)**.** Die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Fibonacci-Zahlen* ist die rekursiv durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

definierte Folge natürlicher Zahlen (Aufgabe 3 von Blatt 9). Wir betrachten außerdem die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

1. Zeigen Sie, dass A genau zwei reelle Eigenwerte λ_1 und λ_2 besitzt.
2. Bestimmen Sie je einen Eigenvektor zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 von A.
3. Finden Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

4. Verwenden Sie das Ergebnis des dritten Aufgabenteils, um für $n \in \mathbb{N}$ eine explizite (nicht-rekursive) Formel für die n-te Fibonacci-Zahl zu finden (und zu beweisen).

   Hinweis. Hier hilft Aufgabe 3 von Blatt 9 und der Konjugationstrick (wie kann man mithilfe von S die Potenzen A^n gut berechnen?).

Bonusaufgabe (Momentenkurve)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$M_n := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

die sogenannte *Momentenkurve*. Zeigen Sie: Sind $v_1, \ldots, v_n \in M_n \backslash \{0\}$ paarweise verschiedene Punkte auf M_n, so ist die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig.
Hinweis. Betrachten Sie eine geeignete Determinante!

Bonusaufgabe (Eigenwerte; für Physiker etc. (als optionale Alternative zur Momentenkurve))**.** Beschreiben Sie eine physikalische Situation, in der Eigenwerte auftreten. Welcher Vektorraum und welcher Endomorphismus wird betrachtet (sowohl mathematisch als auch physikalisch)? Was modellieren dann die Eigenwerte bzw. Eigenvektoren?

Abgabe bis zum 2. Februar 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen