Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Prem — Blatt 5 vom 17. November 2016

Aufgabe 1 (Rechnen in Vektorräumen)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Für jedes $\lambda \in K \setminus \{0\}$ und alle $a, b \in V$ gibt es genau ein $x \in V$ mit
$$\lambda \cdot x + b = a.$$

2. Für alle $a, b \in V \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $\lambda \in K$ mit
$$\lambda \cdot b = a.$$

Aufgabe 2 (der Körper K^n?!)**.** Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis"? Geben Sie genau an, an welcher Stelle etwas schiefgeht und erklären Sie den Fehler!

   Behauptung. Dann ist K^n bezüglich der folgenden Addition und Multiplikation ein Körper:
$$\begin{aligned} +\colon K^n \times K^n &\longrightarrow K^n \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon K^n \times K^n &\longrightarrow K^n \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ \vdots \\ x_n \cdot y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Beweis. Wir wissen bereits, dass $(K^n, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Komponentenweises Nachrechnen zeigt, dass diese Multiplikation auf K^n kommutativ und assoziativ ist, dass der Vektor
$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
   das neutrale Element bezüglich dieser Multiplikation ist, und dass das Distributivgesetz gilt. Es genügt also zu zeigen, dass jedes Element $x \in K^n \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses hat. Wegen $x \neq 0$ gilt für die Koordinaten von x, dass $x_j \neq 0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann rechnet man koordinatenweise nach, dass
$$\begin{pmatrix} x_1^{-1} \\ \vdots \\ x_n^{-1} \end{pmatrix}$$
   multiplikativ invers zu x ist. Also ist $(K^n, +, \cdot)$ ein Körper. □

2. Zeigen Sie: Ist K^n bezüglich der obigen Addition und Mulitplikation ein Körper, so ist $n = 1$.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (erzeugte Unterräume). Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum, sei $E \subset V$ und sei

$$W := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, v_1, \dots, v_n \in E, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \right\}$$

Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

1. Es ist W ein K-Untervektorraum von V und $E \subset W$.
2. Ist $U \subset V$ ein K-Untervektorraum von V mit $E \subset U$, so folgt $W \subset U$.

Hinweis. Man beachte, dass die leere Summe gleich 0 ist!

Aufgabe 4 (Simplizes). Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir das *n-Simplex* durch

$$\Delta^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \text{für alle } j \in \{1, \dots, n+1\} \text{ ist } x_j \geq 0 \text{ und } \sum_{j=1}^{n+1} x_j = 1 \right\};$$

insbesondere ist Δ^n eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$.

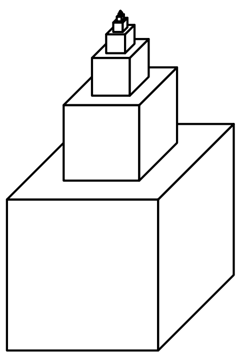
1. Skizzieren Sie $\Delta^0 \subset \mathbb{R}^1$, $\Delta^1 \subset \mathbb{R}^2$ und $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$.
2. Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}$, so gibt es Vektoren $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\Delta^n \subset v_0 + \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\bigl(\{v_1, \dots, v_n\}\bigr).$$

Hinweis. Es ist hilfreich, sich zunächst eine Lösung für $n \in \{0, 1, 2\}$ zu überlegen.

Bonusaufgabe (OpenSCAD). OpenSCAD (http://www.openscad.org) ist Software (Open Source, GPLv2) zur Modellierung von dreidimensionalen Objekten (zum Beispiel als Vorstufe für 3D-Druck).

1. Was haben `translate([x,y,z])` und `scale([x,x,x])` mit der gewöhnlichen $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $\mathbb{R}^3$ zu tun?
2. Wie kann man basierend auf dem Würfel `cube([1,1,1])` auf einfache Weise einen Turm der folgenden Form beschreiben?



Abgabe bis zum 24. November 2016, 10:00 Uhr, in die Briefkästen