

# Fingerübungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig

Blatt 13 vom 23. Januar 2017

---

**Aufgabe 1 (Determinante).** Berechnen Sie für die folgenden Matrizen in  $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  die Determinante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Hinweis.* Berechnen Sie die Determinante zunächst (rekursiv) durch Entwicklung nach der ersten Spalte. Versuchen Sie dann, auch alternative, geschicktere, Rechenwege zu finden.

**Aufgabe 2 (Determinante und Invertierbarkeit).** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie mit dem Invertierbarkeitskriterium der Determinante alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ , für die die Matrix  $A - \lambda \cdot I_3 \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$  invertierbar ist.

**Aufgabe 3 (Leibniz-Formel).** Sei  $K$  ein Körper.

1. Schreiben Sie alle Elemente von  $S_2$  auf; bestimmen Sie das Signum aller Elemente von  $S_2$ .
2. Schreiben Sie die Leibniz-Formel für  $\det: M_{2 \times 2}(K) \rightarrow K$  explizit aus.
3. Schreiben Sie alle Elemente von  $S_3$  auf; bestimmen Sie das Signum aller Elemente von  $S_3$ .
4. Schreiben Sie die Leibniz-Formel für  $\det: M_{3 \times 3}(K) \rightarrow K$  explizit aus.
5. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den bereits bekannten Formeln für  $2 \times 2$ - bzw.  $3 \times 3$ -Matrizen.

*Hinweis.* Die Gruppe  $S_2$  enthält genau zwei Elemente, die Gruppe  $S_3$  genau sechs Elemente.

**Aufgabe 4 (CAS).** Überprüfen Sie Ihre Rechnungen mit einem Computeralgebrasystem!

---

keine Abgabe!