

Fingerübungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig

Blatt 13 vom 23. Januar 2017

Aufgabe 1 (Determinante). Berechnen Sie für die folgenden Matrizen in $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ die Determinante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Berechnen Sie die Determinante zunächst (rekursiv) durch Entwicklung nach der ersten Spalte. Versuchen Sie dann, auch alternative, geschicktere, Rechenwege zu finden.

Aufgabe 2 (Determinante und Invertierbarkeit). Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie mit dem Invertierbarkeitskriterium der Determinante alle $\lambda \in \mathbb{C}$, für die die Matrix $A - \lambda \cdot I_3 \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ invertierbar ist.

Aufgabe 3 (Leibniz-Formel). Sei K ein Körper.

1. Schreiben Sie alle Elemente von S_2 auf; bestimmen Sie das Signum aller Elemente von S_2 .
2. Schreiben Sie die Leibniz-Formel für $\det: M_{2 \times 2}(K) \rightarrow K$ explizit aus.
3. Schreiben Sie alle Elemente von S_3 auf; bestimmen Sie das Signum aller Elemente von S_3 .
4. Schreiben Sie die Leibniz-Formel für $\det: M_{3 \times 3}(K) \rightarrow K$ explizit aus.
5. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den bereits bekannten Formeln für 2×2 - bzw. 3×3 -Matrizen.

Hinweis. Die Gruppe S_2 enthält genau zwei Elemente, die Gruppe S_3 genau sechs Elemente.

Aufgabe 4 (CAS). Überprüfen Sie Ihre Rechnungen mit einem Computeralgebrasystem!

keine Abgabe!