Fingerübungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Prem Blatt 2 vom 31. Oktober 2016

Aufgabe 1 (surjektiv, injektiv). Seien X, Y Mengen und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Welche der folgenden Formeln sind äquivalent zur Injektivität bzw. Surjektivität von f ? Was bedeuten die anderen Formeln?

1. $\exists_{x\in X} \quad \forall_{y\in Y} \quad f(x) = y$
2. $\forall_{y\in Y} \quad \exists_{x\in X} \quad f(x) = y$
3. $\forall_{x\in X} \quad \forall_{x'\in X} \quad \big((f(x) = f(x')) \Longrightarrow (x = x')\big)$
4. $\forall_{x\in X} \quad \forall_{x'\in X} \quad \big((f(x) \neq f(x')) \Longrightarrow (x = x')\big)$

Aufgabe 2 (kommutative Diagramme). Welche Gleichung gehört zu welchem kommutativen Diagramm?

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ Z \arrow[r, "k"'] & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ Z \arrow[r, "k"'] & W \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "h"] \\ Z & W \arrow[l, "k"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ Z \arrow[u, "g"] \arrow[r, "k"'] & W \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

1. $k \circ h = g \circ f$
2. $h \circ k \circ g = f$
3. $h \circ f = k \circ g$
4. $f \circ g = h \circ k$

Aufgabe 3 (Rekursionen). Welche einfachen Beschreibungen haben die Abbildungen $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, die durch die folgenden Rekursionen definiert sind?

1. $f(0) := 0$ und $f(n+1) := f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. $f(0) := 1$ und $f(n+1) := 2 \cdot f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
3. $f(0) := 2016$ und $f(n+1) := f(n) + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
4. $f(0) := 1$ und $f(n+1) := f(n) \cdot 2 \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 (etc.). Formulieren und lösen Sie weitere Aufgaben vom selben Typ!

---

keine Abgabe!