Klausur zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig 14. Februar 2017

Name: Vorname:

Matrikelnummer: □□□□□□□□ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	9	9	9	9	9	10	5	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 $(3+3+3=9$ Punkte$)$**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Es gilt
$$\exists_{x\in V} \quad \forall_{y\in V} \quad x+y=y.$$

2. Es gilt
$$\forall_{\lambda\in K} \quad \exists_{x\in V} \quad \lambda\cdot x=0.$$

3. Es gilt
$$\forall_{x\in V} \quad \Bigl(\bigl(\exists_{y\in V} \quad x+y=0\bigr) \Longrightarrow x=0\Bigr).$$

Lösung:

1. Diese Aussage ist wahr, denn: Sei $x := 0$. Dann gilt
$$\forall_{y\in V} \quad x+y=0+y=y,$$
da $(V,+)$ eine Gruppe mit neutralem Element 0 ist.

2. Diese Aussage ist wahr, denn: Sei $\lambda\in K$. Dann ist $\lambda\cdot 0=0$.

3. Diese Aussage ist im allgemeinen falsch, denn: Sei $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}$ und $x := 1 \in V\setminus\{0\}$. Dann gilt $x+(-x)=0$, aber $x\neq 0$.

Aufgabe 2 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ ist $v_j \neq 0$.
2. Ist $w \in V \setminus \{0\}$, so ist auch die Familie $(v_1 + w, \dots, v_n + w)$ linear unabhängig.
3. Es gilt $\dim_K\bigl(\operatorname{Span}_K(\{v_1\}) \cap \operatorname{Span}_K(\{v_2, \dots, v_n\})\bigr) = 0$.

Lösung:

1. Diese Aussage ist wahr, denn: *Angenommen,* es gibt ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $v_j = 0$. Dann ist
$$1 \cdot v_j + \sum_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j\}} 0 \cdot v_k = 0,$$
aber einer der Koeffizienten (nämlich der von v_j) ist nicht 0. Dies steht im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $(v_1, \dots, v_n)$.

   Also gilt $v_j \neq 0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.
2. Diese Aussage ist im allgemeinen falsch, denn: Sei $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}$, $n := 1$, $v_1 := 1$ und $w := -v_1 \in V \setminus \{0\}$. Dann ist die Familie (v_1) linear unabhängig, aber die Familie $(v_1 + w) = (0)$ ist linear abhängig (siehe erster Teil).
3. Diese Aussage ist wahr, denn: Da $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig ist, folgt
$$\operatorname{Span}_K(\{v_1\}) \cap \operatorname{Span}_K(\{v_2, \dots, v_n\}) = 0$$
(durch direktes Nachrechnen oder mithilfe der Dimensionsformel für Untervektorräume). Insbesondere ist
$$\dim_K\bigl(\operatorname{Span}_K(\{v_1\}) \cap \operatorname{Span}_K(\{v_2, \dots, v_n\})\bigr) = 0.$$

Aufgabe 3 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist $0 \in \ker f$, so ist f injektiv.
2. Ist $f \circ f$ die Nullabbildung, so ist auch f die Nullabbildung
3. Jeder Eigenvektor von f ist ein Eigenvektor von $f \circ f$.

Lösung:

1. Diese Aussage ist im allgemeinen falsch, denn: Sei $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}$ und sei $f := 0\colon V \longrightarrow V$ die Nullabbildung. Dann ist $f(0) = 0$, und damit $0 \in \ker f$. Andererseits ist f *nicht* injektiv, denn $f(0) = 0 = f(1)$ und $0 \neq 1$.
2. Diese Aussage ist im allgemeinen falsch, denn: Sei $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^2$ und sei
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Dann ist f *nicht* die Nullabbildung (denn $f(e_1) = e_2 \neq 0$), aber
$$\forall_{x \in \mathbb{R}^2} \quad f \circ f(x) = f\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
bzw. $f \circ f = 0$.
3. Diese Aussage ist wahr, denn: Sei $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$. Dann ist $v \neq 0$ und (da v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ und f linear ist)
$$f \circ f(v) = f(f(v)) = f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^2 \cdot v.$$
Also ist v ein Eigenvektor von $f \circ f$ (zum Eigenwert λ^2).

Aufgabe 4 ($1 + 4 + 1 + 3 = 9$ Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $n := \dim_K V > 0$ und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.

1. Wie ist die Determinante von f definiert?
2. Warum ist diese Definition der Determinante von f unabhängig von den getroffenen Wahlen? Erklären Sie die wichtigsten Beweisschritte!
3. Nennen Sie eine Anwendung der Determinante von Endomorphismen.
4. Wie lautet der Satz über die Leibniz-Formel für die Determinante von Matrizen und wie ist die Verknüpfung in der darin auftretenden Gruppe definiert?

Lösung:

1. Sei B eine Basis von V. Dann definiert man die Determinante von f durch
$$\det f := \det M_{B,B}(f),$$
wobei $M_{B,B}(f) \in M_{n\times n}(K)$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B ist.
2. Seien B, C Basen von V. Dann gilt $\det M_{B,B}(f) = \det M_{C,C}(f)$, denn: Es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit
$$M_{C,C}(f) = S^{-1} \cdot M_{B,B}(f) \cdot S$$
[nämlich $S = M_{C,B}$]. Mit der Multiplikativität der Determinante folgt dann
$$\begin{aligned}\det M_{C,C}(f) &= \det(S^{-1} \cdot M_{B,B}(f) \cdot S) = \frac{1}{\det S} \cdot \det M_{B,B}(f) \cdot \det S \\ &= \det M_{B,B}(f).\end{aligned}$$
3. Zum Beispiel gilt genau dann $\det f = 0$, wenn f *nicht* invertierbar ist.
4. Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Dann gilt
$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} A_{j,\sigma(j)}.$$
Die Verknüpfung in der symmetrischen Gruppe $S_n := S_{\{1,\dots,n\}}$ ist dabei die Abbildungskomposition [von Bijektionen $\{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$].

Aufgabe 5 $(3+3+3=9$ Punkte$)$**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

und sei $f := L(A)\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung.

1. Welche geometrische Interpretation besitzt die lineare Abbildung f ?
2. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ von f bezüglich der Basis $B := (e_2, e_1 + e_2)$ von $\mathbb{R}^2$.
3. Gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\det(A^n) = 2017$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Wegen
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
handelt es sich bei f um eine Drehung um $\pi/2$, gefolgt von einer Skalierung/Streckung um den Faktor 2 [kurz: f ist eine Drehstreckung].

2. Wegen
$$M(f) = M(L(A)) = A \quad \text{und} \quad M_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
gilt
$$M_{B,B}(f) = M_B^{-1} \cdot M(f) \cdot M_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Nein, denn: Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann ist (da die Determinante multiplikativ ist)
$$\det(A^n) = (\det A)^n = (0 + 2 \cdot 2)^n = 4^n,$$
aber 2017 ist *nicht* durch 4 teilbar.

Aufgabe 6 $(3+2+5=10$ Punkte$)$**.** Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 1/3 \cdot x_3 \\ x_1 + x_2 - 1/3 \cdot x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie die Menge
$$f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$
mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

2. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3/\operatorname{im} f)$.

3. Ist der Endomorphismus f (über $\mathbb{C}$) diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Sei
$$A := M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 1 & -1/3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$
Dann ist
$$f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{ x \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = V\left(A, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
Wir lösen das lineare Gleichungssystem
$$\text{Gesucht: alle } x \in \mathbb{C}^3 \text{ mit } A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (s. nächste Seite). An der entstandenen Zeilenstufenform erkennt man, dass dieses lineare Gleichungssystem nicht lösbar ist. Also ist
$$f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = \emptyset.$$

Die Berechnung mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\text{Pivot?} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & -1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)+(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{Pivot?} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1/3} & 1 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3 \cdot (2)} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3) - 2/3 \cdot (2)} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Es gibt nun kein weiteres Pivotelement mehr und das Verfahren endet an dieser Stelle.

2. Aus der Zeilenstufenform im ersten Teil folgt $\operatorname{rg} A = 2$. Also liefert die Dimensionsformel für Quotientenräume

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3 / \operatorname{im} f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3 - \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{im} f = 3 - \operatorname{rg} f = 3 - \operatorname{rg} A = 3 - 2 = 1.$$

3. Der Endomorphismus f ist über $\mathbb{C}$ *nicht* diagonalisierbar, denn: Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte (bzw. das Spektrum von f) über das charakteristische Polynom von f. Nach Definition ist

$$\chi_f = \chi_A = \det(T \cdot I_3 - A).$$

Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned}\det(T \cdot I_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} T & 0 & -1/3 \\ -1 & T-1 & 1/3 \\ 1 & 1 & T-1 \end{pmatrix} \\ &= T \cdot \det \begin{pmatrix} T-1 & 1/3 \\ 1 & T-1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & T-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= T \cdot (T-1)^2 - \frac{1}{3} \cdot T + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot (T-1) \\ &= T \cdot (T-1)^2.\end{aligned}$$

Die Nullstellen von χ_f sind somit genau 0 und 1. Also ist $\sigma_{\mathbb{C}}(f) = \{0, 1\}$.

Wir bestimmen nun die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von f:

– Eigenwert 0: Es ist (wegen der Dimensionsformel und der Berechnung im ersten bzw. zweiten Teil)

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Eig}_0 f = \dim_{\mathbb{C}} \ker f = 3 - \operatorname{rg} f = 3 - 2 = 1.$$

– Eigenwert 1: Es gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Eig}_1 f = \dim_{\mathbb{C}} V(A - I_3, 0) = 3 - \operatorname{rg}(A - I_3).$$

Die Matrix

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & -1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat Rang 2 (wie man leicht sieht, z.B. mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren oder von Hand). Also ist

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Eig}_1 f = 1.$$

Also summieren sich die geometrischen Vielfachheiten nur zu $2 \neq 3 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3$. Somit ist f *nicht* diagonalisierbar.

Aufgabe 7 (5 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbare Matrix mit $\sigma_\mathbb{R}(A) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie, dass es dann eine Matrix $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit

$$B^2 = A$$

gibt.

Lösung: Da A diagonalisierbar ist, gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Diagonalgestalt ist, etwa

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Wegen $\sigma_\mathbb{R}(S^{-1} \cdot A \cdot S) = \sigma_\mathbb{R}(A) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist

$$B := S \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix} \cdot S^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

und

$$\begin{aligned} B^2 &= S \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix} \cdot S^{-1} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix} \cdot S^{-1} \\ &= S \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix} \cdot S^{-1} \\ &= S \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} \cdot S^{-1} = S \cdot S^{-1} \cdot A \cdot S \cdot S^{-1} = A. \end{aligned}$$