Probeklausur zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig 6. Februar 2017

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	9	9	9	9	9	9	6	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 $(3 + 3 + 3 = 9$ Punkte$)$**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Es gilt
$$\forall_{x,y\in V} \quad \exists_{z\in V} \quad x = y + z.$$

2. Es gilt
$$\forall_{x,y\in V\setminus\{0\}} \quad \exists_{\lambda\in K} \quad x = \lambda \cdot y.$$

3. Es gilt
$$\forall_{x\in V} \quad \Bigl(\bigl(\forall_{\lambda\in K} \quad \lambda \cdot x = 0\bigr) \Longrightarrow x = 0\Bigr).$$

Lösung:

1. Diese Aussage ist wahr, denn $(V, +)$ bildet eine abelsche Gruppe. Genauer: Sind $x, y \in V$, so leistet $z := x + (-y)$ wegen
$$y + z = y + x + (-y) = 0 + x = x$$
das Gewünschte.

2. Diese Aussage ist im allgemeinen falsch, denn: Sei $K := \mathbb{R}$, sei $V := \mathbb{R}^2$ und seien $x := e_1, y := e_2 \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $x \neq 0$ und $y \neq 0$, aber es gibt kein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $x = \lambda \cdot y$.

   [Es gibt natürlich noch viele weitere Beispiele.]

3. Diese Aussage ist wahr, denn: Sei $x \in V$ und es gelte
$$\forall_{\lambda\in K} \quad \lambda \cdot x = 0.$$
Dann ist insbesondere auch $x = 1 \cdot x = 0$.

Aufgabe 2 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Dann ist $(v_1 + v_2, v_2, v_3, \dots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V.
2. Es gilt $\dim_K V = n$.
3. Für jeden Vektor $w \in V \setminus \{0\}$ ist die Familie $(w, v_2, v_3, \dots, v_n)$ in V linear unabhängig.

Lösung:

1. Diese Aussage ist wahr, denn: Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ mit

   $$0 = \alpha_1 \cdot (v_1 + v_2) + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = \alpha_1 \cdot v_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n.$$

   Da $(v_1, \dots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie ist, folgt

   $$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_n = 0.$$

   Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich aber auch $\alpha_2 = 0$. Also ist $(v_1 + v_2, v_3, \dots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V.

   [Alternativ kann man auch mit der Invertierbarkeit einer geeigneten Matrix argumentieren.]

2. Diese Aussage ist im allgemeinen falsch, denn: Sei $n := 0$, $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}$. Die leere Familie in V ist linear unabhängig, aber $\dim_K V = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$.

   [Es gibt natürlich noch viele weitere Beispiele.]

3. Diese Aussage ist im allgemeinen falsch, denn: Sei $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^2$, $n := 2$ und $v_1 := e_1$, $v_2 := e_2$. Dann ist (v_1, v_2) linear unabhängig und $v_2 \neq 0$, aber (v_2, v_2) ist *nicht* linear unabhängig.

   [Es gibt natürlich noch viele weitere Beispiele.]

Aufgabe 3 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Für alle $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$ gilt $v - v' \in \ker f$.
2. Ist $w \in W$, so ist die Menge $f^{-1}(\{w\}) \subset V$ ein Untervektorraum von V.
3. Sei $U := \operatorname{im} f \subset W$. Dann ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} g\colon V &\longrightarrow W/U \\ v &\longmapsto f(v) + U \end{aligned}$$

surjektiv.

Lösung:

1. Diese Aussage ist wahr, denn: Seien $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$. Dann ist (wegen der Linearität von f)

$$f(v - v') = f(v) - f(v') = 0,$$

und damit (nach Definition des Kerns) $v - v' \in \ker f$.

2. Diese Aussage ist im allgemeinen falsch, denn: Sei $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}$, $W := \mathbb{R}$ und sei $f\colon V \longrightarrow W$ die Nullabbildung (diese ist linear). Dann ist $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$; insbesondere ist $f^{-1}(\{1\})$ *kein* Untervektorraum von V (jeder Untervektorraum muss das neutrale Element 0 enthalten).

[Es gibt natürlich noch viele weitere Beispiele.]

3. Diese Aussage ist im allgemeinen falsch, denn: Sei $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}$, $W := \mathbb{R}$ und sei $f\colon V \longrightarrow W$ die Nullabbildung. Dann ist $\operatorname{im} f = \{0\}$ und

$$\begin{aligned} g\colon V = \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}/\{0\} = W/\operatorname{im} f \\ x &\longmapsto 0 + \{0\} \end{aligned}$$

ist die Nullabbildung. Wegen $W/\operatorname{im} f = W/\{0\} \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ ist diese aber nicht surjektiv.

[Es gibt natürlich noch viele weitere Beispiele. Man kann hier auch gut mit Dimensionsformeln argumentieren.]

Aufgabe 4 $(1 + 3 + 4 + 1 = 9$ Punkte$)$**.**

1. Wie ist die Dimension eines endlich erzeugten Vektorraums definiert?
2. Formulieren Sie die Dimensionsformel für lineare Abbildungen (von endlich-dimensionalen Vektorräumen).
3. Skizzieren Sie die wesentlichen Schritte des Beweises für die Dimensionsformel für lineare Abbildungen.
4. Nennen Sie eine Folgerung der Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

Lösung:

1. Sei K ein Körper und sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so definieren wir die *Dimension von V* als
$$\dim_K(V) := n.$$
2. *Dimensionsformel für lineare Abbildungen.* Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, sei W ein (endlich-dimensionaler) K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Dann gilt
$$\dim_K V = \dim_K \ker f + \dim_K \operatorname{im} f.$$
(bzw. $\operatorname{rg} f = \dim_K V - \dim_K \ker f$.)
3. Mit dem Homomorphiesatz folgt $V/\ker f \cong_K \operatorname{im} f$. Mit der Invarianz der Dimension folgt, dass
$$\dim_K \operatorname{im} f = \dim_K V/\ker f.$$
Mit der Dimensionsformel für Quotientenvektorräume erhalten wir daher
$$\dim_K \operatorname{im} f = \dim_K V - \ker f,$$
was die Behauptung liefert.
4. Zum Beispiel folgt aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen, dass surjektive lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen derselben Dimension bereits Isomorphismen sind.

   [Es gibt noch viele weitere Folgerungen . . .]

Aufgabe 5 $(3+3+3=9$ Punkte$)$**.** Wir betrachten

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

1. Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

   Gesucht: alle $x \in \mathbb{C}^3$ mit $A \cdot x = b$

2. Gibt es ein $c \in \mathbb{C}^3$, für das das lineare Gleichungssystem

   Gesucht: alle $x \in \mathbb{C}^3$ mit $A \cdot x = c$

   keine Lösung besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Zeigen Sie: Ist $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$, so gilt $\det(A \cdot B) = 0$.

Lösung:

1. Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren erhalten wir

$$\text{Pivot?} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3) - 2 \cdot (1)} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{Pivot?} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1) \cdot (2)} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3) + 3 \cdot (2)} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also erhalten wir durch rekursives Rückwärtsauflösen

$$V(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 3 \cdot x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{C} \right\} = e_1 + \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[Es genügt natürlich eine der beiden Darstellungen der Lösungsmenge.]

2. Aus der Berechnung im ersten Teil folgt $\operatorname{rg} A < 3$. Also ist $\operatorname{im} L(A) \neq \mathbb{C}^3$. Insbesondere gibt es ein $c \in \mathbb{C}^3$ mit

$$\forall_{x \in \mathbb{C}^3} \quad A \cdot x = (L(A))(x) \neq c.$$

Somit besitzt das lineare Gleichungssystem

Gesucht: alle $x \in \mathbb{C}^3$ mit $A \cdot x = c$

keine Lösungen.

[Alternativ kann man auch einen konkreten Vektor c angeben und für diesen nachrechnen, dass das zugehörige lineare Gleichungssystem keine Lösungen besitzt. Oder man überprüft die Nicht-Invertierbarkeit von A mithilfe der Determinante.]

3. Wie wir bereits im zweiten/ersten Teil gesehen haben, ist die Matrix A nicht invertierbar. Also ist $\det A = 0$. Mit der Multiplikativität der Determinante folgt daher

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 0.$$

[Alternativ kann man direkt $\det A = 0$ berechnen und dann die Multiplikativität der Determinante verwenden. Oder man schließt aus der Nicht-Surjektivität von $L(A)$ aus dem zweiten Teil, dass auch $L(A \cdot B) = L(A) \circ L(B)$ nicht surjektiv ist und daher $A \cdot B$ nicht invertierbar ist, was $\det(A \cdot B) = 0$ impliziert.]

Aufgabe 6 $(2+4+3=9$ Punkte$)$**.** Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 + x_2 \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

1. Wir betrachten die Basis
$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$.

2. Ist f über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Handelt es sich bei f um eine Rotation um den Nullpunkt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Nach Definition ist
$$M_{B,B}(f) = M(f_{B,B}) = M(T_{E_2,B}^{-1} \circ f \circ T_{E_2,B}) = M_B^{-1} \cdot M(f) \cdot M_B$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Die Abbildung f ist über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar, denn: Es genügt zu überprüfen, ob $A := M_{B,B}(f)$ diagonalisierbar ist. Es ist 3 der einzige Eigenwert von A (denn $\chi_A = \det(T \cdot I_2 - A) = (T-3)^2$). Dieser Eigenwert hat aber nur geometrische Vielfachheit 1, denn
$$\mathrm{Eig}_3(A) = V(A - 3 \cdot I_2, 0) = V\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) = \mathbb{R} \cdot e_1.$$
Also summieren sich die geometrischen Vielfachheiten nicht zu 2 und f ist somit nicht diagonalisierbar.

   [Alternativ kann man natürlich die Eigenwerte bzw. geometrischen Vielfachheiten von f auch aus $M(f)$ berechnen.]

3. Die Abbildung f ist keine Rotation um den Nullpunkt, denn Rotationen haben niemals den Eigenwert 3.

   [Wenn man nicht geometrisch argumentieren möchte, kann man auch einfach zeigen, dass $M(f)$ nicht die Gestalt einer Rotationsmatrix hat, indem man z.B. die Determinanten vergleicht.]

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus mit $f \circ f = \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie, dass f (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar ist.
Hinweis. Für alle $v \in V$ ist $v = 1/2 \cdot (v + f(v) - f(v) + v)$.

Lösung: Wir schreiben

$$V_+ := \ker(f - \mathrm{id}_V) \quad \text{und} \quad V_- := \ker(f + \mathrm{id}_V).$$

Dann sind V_+ und V_- Untervektorräume von V (falls sie nicht-trivial sind, sogar Eigenräume von f) und wir können wie folgt vorgehen:

1. Ist $v \in V$, so ist $v + f(v) \in V_+$, denn: Wegen $f \circ f = \mathrm{id}_V$ ist

   $$(f - \mathrm{id}_V)(v + f(v)) = f(v) + f \circ f(v) - v - f(v) = f(v) + v - v - f(v) = 0.$$

2. Ist $v \in v$, so ist $v - f(v) \in V_-$, denn: Wegen $f \circ f = \mathrm{id}_V$ ist

   $$(f + \mathrm{id}_V)(v - f(v)) = f(v) - f \circ f(v) + v - f(v) = f(v) - v + v - f(v) = 0.$$

3. Es ist $V = V_+ + V_-$, denn: Für alle $v \in V$ ist

   $$v = \frac{1}{2} \cdot (v + f(v) - f(v) + v) = \frac{1}{2} \cdot (v + f(v)) + \frac{1}{2} \cdot (v - f(v)),$$

   worauf wir die ersten beiden Schritte anwenden können.

4. Wir wählen eine Basis B_+ von V_+ und eine Basis B_- von V_-. Dann ist die aus B_+ und B_- zusammengesetzte Familie B eine Basis von V, denn: Mit dem vorigen Schritt folgt, dass B ein Erzeugendensystem von V ist.

   Außerdem ist B linear unabhängig, denn: Ist V_+ oder V_- trivial, so ist dies klar. Sind beide nicht-trivial, so ist $V_+ = \mathrm{Eig}_1(f)$ und $V_- = \mathrm{Eig}_{-1}(f)$ und dann folgt die lineare Unabhängigkeit aus der Tatsache, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind.

   Außerdem folgt mit diesem Argument, dass B aus Eigenvektoren von f besteht.

Also ist f diagonalisierbar.
[Dass $V_+ \cap V_- = \{0\}$ ist, lässt sich auch von Hand einfach nachrechnen.]