

Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

Blatt 0 vom 14. Oktober 2024

Aufgabe 1 (klassische Semantik; 4 Punkte). Wir betrachten die aussagenlogische Formel

$$(A \wedge (B \vee A)) \implies ((\neg A) \vee B)$$

mit den aussagenlogischen Variablen A und B .

1. Welchen Wert erhält man in der klassischen Semantik der Aussagenlogik, wenn man in dieser Formel die Variable A mit w und die Variable B mit f belegt? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Skizzieren Sie den Syntaxbaum für diese Formel!

Aufgabe 2 (tautologisch?!; 4 Punkte). Seien A und B aussagenlogische Variablen. Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind aussagenlogische Tautologien? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. $A \implies (B \wedge (\neg B))$
2. $((\neg A) \vee B) \iff (A \implies B)$

Aufgabe 3 (natürliche Wahrheiten?!; 4 Punkte). Übersetzen Sie die folgende quantorenlogische Formel in der Sprache der natürlichen Zahlen in einen entsprechenden deutschen Satz (bzw. umgekehrt). Handelt es sich dabei jeweils um eine wahre quantorenlogische Aussage? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $\forall x \exists y \exists z \quad x = 1 + z + y + 1$
2. Es gibt eine natürliche Zahl z mit folgender Eigenschaft: Für alle natürlichen Zahlen x ist $z \cdot x \cdot z = x$.

Hinweis. Wir werden die natürlichen Zahlen später präzise einführen. Sie können in dieser Aufgabe Ihr Schulwissen verwenden.

Aufgabe 4 (der Dreiecksoperator; 4 Punkte). Wir ergänzen die aussagenlogische Syntax um folgendes:

- Sind A und B aussagenlogische Formeln, so ist auch $(A \triangle B)$ eine aussagenlogische Formel.

Wir ergänzen die klassische Semantik der Aussagenlogik um die folgende Interpretation:

A	B	$A \triangle B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben in dieser erweiterten Aussagenlogik:

1. Zeigen Sie, dass $(A \triangle B) \implies (A \vee B)$ eine aussagenlogische Tautologie ist.
2. Wie könnte man „ \triangle “ umgangssprachlich sinnvoll übersetzen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis. Es handelt sich bei dem Symbol „ \triangle “ *nicht* um die Standardnotation für diese logische Operation!

Keine Abgabe/Korrektur!

Allgemeine Hinweise

- Beginnen Sie mit der Bearbeitung an dem Tag, an das Übungsblatt erscheint – manche Dinge brauchen einfach ein paar Tage Zeit.
- Lesen Sie sich alle Aufgaben gründlich durch.
- Kennen Sie die auftretenden Begriffe? Wenn nicht: Nachschlagen/Merken!
- Verstehen Sie, was in der Aufgabe verlangt wird? Insbesondere: Was ist gegeben? Was ist zu tun/zeigen?
- Verwenden Sie viel Schmierpapier und geben Sie sich genug Zeit, an der Aufgabe herumzuxperimentieren! Selbst wenn Sie die Aufgabe nicht vollständig oder nicht korrekt lösen, werden Sie auf diese Weise viel lernen, da Sie sich aktiv mit dem Material auseinandersetzen.
- Wenn Sie nicht weiterwissen, diskutieren Sie die Aufgabe mit Kommilitonen. Lassen Sie sich aber auf keinen Fall dazu verleiten, einfach Lösungen irgendwo abzuschreiben oder ausschließlich in Gruppen zu arbeiten. Mathematik kann man nur lernen, wenn man aktiv damit arbeitet und seine Gedanken selbst formuliert!
- Nutzen Sie auch die Zentralübung, die Übungsgruppe und den Lernraum für Fragen!
- Üben Sie jeden Tag ein bisschen; es ist besser, jeden Tag eine Stunde Lineare Algebra I zu üben als einmal in der Woche viele Stunden am Stück! Das Gelernte muss sich festigen können und wiederholt werden.

Checkliste vor der Abgabe

- Bei jeder Aufgabe: Lösung sauber strukturiert?
Insbesondere (fast immer): Voraussetzung, Behauptung, Beweis!
- Name(n) auf der Abgabe?
Nummer der Übungsgruppe auf der Abgabe?
- Können alle Autoren die abgegebenen Lösungen vorstellen?
- Achten Sie bitte gute Lesbarkeit und Verständlichkeit;
lassen Sie genug Platz für Korrekturanmerkungen.
- Papierabgabe:
 - Blätter im A4-Format?
 - Blätter zusammengetackert?
Bitte keine Umschläge, Hefter, ... verwenden!
 - In den richtigen Briefkasten einwerfen!
- Digitale Abgabe:
 - Abgabe nur im pdf-Format möglich
 - Bei gescannten Lösungen: Lesbarkeit?!

Hinweise zu Aufgabe 1

- Wie ist „aussagenlogische Formel“ definiert? Was ist die „klassische Semantik“ von aussagenlogischen Formeln?
- Wie kann man also den Wert Schritt für Schritt berechnen?
- Wie kann man diese Berechnung nachvollziehbar aufschreiben?
- Was ist ein „Syntaxbaum“ einer aussagenlogischen Formel?
- Gibt es ähnliche Beispiele aus der Vorlesung?

Hinweise zu Aufgabe 2

- Wie ist „aussagenlogische Tautologie“ definiert?
- Was muss man also überprüfen?

Hinweise zu Aufgabe 3

- Wie ist die Semantik von \forall und \exists definiert?
- Denken Sie auch an kleine natürliche Zahlen!

Hinweise zu Aufgabe 4

- Wie ist „aussagenlogische Tautologie“ definiert?
- Vergleichen Sie die Wahrheitstafel für „ Δ “ mit umgangssprachlichen Satzkonstruktionen.

Lösung zu Aufgabe 1

Voraussetzung: Seien A und B aussagenlogische Variablen. Wir betrachten die aussagenlogische Formel

$$(A \wedge (B \vee A)) \implies ((\neg A) \vee B).$$

- Teilaufgabe 1:

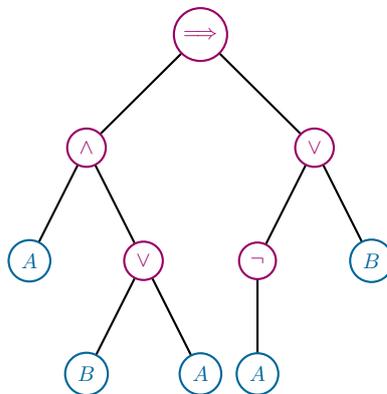
Voraussetzung. Die Variable A wird mit w belegt, die Variable B mit f .

Behauptung. In der klassischen Semantik erhält die obige Formel unter dieser Belegung den Wert f .

Beweis. Nach Definition der klassischen Semantik können wir den Wert Schritt für Schritt wie folgt bestimmen:

- $B \vee A$ erhält den Wert w (nach der semantischen Regel für \vee)
- $A \wedge (B \vee A)$ erhält somit den Wert w (nach der semantischen Regel für \wedge)
- $\neg A$ erhält den Wert f (nach der semantischen Regel für \neg)
- $(\neg A) \vee B$ erhält somit den Wert f (nach der semantischen Regel für \vee)
- $(A \wedge (B \vee A)) \implies ((\neg A) \vee B)$ erhält somit insgesamt den Wert f (nach der semantischen Regel für \implies und den obigen Ergebnissen für $A \wedge (B \vee A)$ und $(\neg A) \vee B$). \square

- Teilaufgabe 2: Der entsprechende Syntaxbaum ist:



Hinweis. Lösungen sollten im Normalfall in

- Voraussetzung
- Behauptung
- Beweis

gegliedert werden. Durch diese Struktur wird die Lösung übersichtlich und viele Fehler bzw. Lücken werden vermieden.

Den allgemeinen Beweisbegriff führen wir in der zweiten Vorlesung ein. Auf diesem Übungsblatt treten nur „Begründungen“ auf, die direkt auf den Definitionen beruhen. Es ist aber nicht verkehrt, sich gleich das Wort „Beweis“ statt „Begründung“ anzugewöhnen.

Lösungsversuch zu Aufgabe 1.1

Man erhält den Wert f.

Korrektur. Diese „Lösung“ ist nicht vollständig: Der angegebene Wert ist zwar korrekt, es wird aber keine Begründung angegeben. Viel interessanter als der Wert ist der Weg dorthin! Insbesondere fehlt die typische Gliederung in Voraussetzung/Behauptung/Beweis.

Lösungsversuch zu Aufgabe 1.1

Behauptung. Bestimme den Wert von $(A \wedge (B \vee A)) \implies ((\neg A) \vee B)$, wenn man A mit w belegt und B mit f.

Beweis. ... □

Korrektur. Diese Behauptung ist keine Behauptung, sondern eine Aufgabe.

Lösung zu Aufgabe 2

Voraussetzung: Seien A und B aussagenlogische Variablen.

- Teilaufgabe 1:

Behauptung. Es ist $A \implies (B \wedge (\neg B))$ keine aussagenlogische Tautologie.

Beweis. Es genügt, eine Belegung für A und B anzugeben, für die angegebene Formel nicht den Wert w erhält.

Wir belegen A mit w und B mit w. Dann erhalten wir Schritt für Schritt:

- Die Formel $B \wedge (\neg B)$ erhält den Wert f.
- Die Formel $A \implies (B \wedge (\neg B))$ erhält somit den Wert f.

Also ist $A \implies (B \wedge (\neg B))$ keine aussagenlogische Tautologie. □

- Teilaufgabe 2:

Behauptung. Es ist $((\neg A) \vee B) \iff (A \implies B)$ eine aussagenlogische Tautologie.

Beweis. Wir überprüfen, dass die gegebene Formel unter allen möglichen Belegungen für A und B den Wert w erhält:

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$A \implies B$	$((\neg A) \vee B) \iff (A \implies B)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Also ist $((\neg A) \vee B) \iff (A \implies B)$ eine aussagenlogische Tautologie. □

Lösungsversuch zu Aufgabe 2.1

Ja, es ist eine Tautologie, denn, wenn man A mit f und B mit w belegt, ergibt sich für die gesamte Formel der Wert w .

Korrektur. Diese „Lösung“ ist nicht korrekt: Die behauptete Aussage stimmt nicht (s. obiger Beweis). Die Begründung ist nicht schlüssig, da für eine Tautologie *alle* möglichen Bewertungen überprüft werden müssen.

Lösungsversuch zu Aufgabe 2.1

Nein, es ist keine Tautologie. Dies ist offensichtlich.

Korrektur. „Offensichtlich“ ist ein gefährliches Wort, das zu vielen Fehlern und Missverständnissen führt. Lösungen zu Übungsaufgaben müssen so formuliert sein, dass dem Leser klar ist, dass Sie wirklich verstanden haben, wie Ihre Lösung funktioniert. Dies ist bei der obigen „Lösung“ nicht gegeben.

Lösungsversuch zu Aufgabe 2.2

Behauptung. Es ist $((\neg A) \vee B) \iff (A \implies B)$ eine aussagenlogische Tautologie.

Beweis. Ich habe ein Programm geschrieben, das alle möglichen Belegungen ausprobiert. Es ergab sich immer der Wert w . Also handelt es sich um eine aussagenlogische Tautologie. \square

Korrektur. Man könnte diese Aufgabe tatsächlich mit einem entsprechenden Programm lösen. Dann muss aber unbedingt der Quellcode mit abgegeben werden und es muss nachvollziehbar (!) dokumentiert werden, warum das Programm korrekt ist und die Aufgabe löst (das ist oft schwieriger als man denkt ...).

Lösungsversuch zu Aufgabe 2.2

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$A \implies B$	$((\neg A) \vee B) \iff (A \implies B)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Korrektur. Bei dieser „Lösung“ ist die Tabelle zwar korrekt, es ist aber nicht klar, was die Antwort auf Frage aus der Aufgabe ist und was diese Tabelle damit zu tun hat.

Falls man die Antwort auf die Fragen nicht sofort „sieht“, kann es natürlich sinnvoll sein, zunächst diese Tabelle vollständig auszufüllen und dann anhand dieser Tabelle die Frage zu beantworten. Die abgegebene Lösung muss aber auf jeden Fall die Antwort enthalten und nachvollziehbar formuliert sein.

Lösung zu Aufgabe 3

- Teilaufgabe 1:

Voraussetzung. Sei A die quantorenlogische Formel

$$\forall_x \exists_y \exists_z \ x = 1 + z + y + 1$$

in der Sprache der natürlichen Zahlen.

Umgangssprachliche Formulierung. Indem wir

- \forall_x mit „für alle natürlichen Zahlen x “,
- \exists_x mit „es existiert eine natürliche Zahl x “

übersetzen, entspricht A dem folgenden deutschen Satz:

Für alle natürlichen Zahlen x gibt es natürliche Zahlen y und z mit $x = 1 + z + y + 1$.

Behauptung. Die quantorenlogische Aussage A ist *nicht* wahr.

Beweis. Es genügt, eine natürliche Zahl x zu finden, für die die Aussage $\exists_y \exists_z x = z + y + x + 1$ in der Sprache der natürlichen Zahlen *nicht* wahr ist.

Wir betrachten die natürliche Zahl $x = 1$. Für alle natürlichen Zahlen y und z ist

$$1 + z + y + 1 \geq 1 + 1 > 1 = x.$$

Insbesondere ist $1 + z + y + 1 \neq x$. Also gilt *nicht*, dass es natürlichen Zahlen y, z mit $x = 1 + z + y + 1$ gibt.

Somit ist $\exists_y \exists_z x = 1 + z + y + 1$ für $x = 1$ *nicht* wahr. Also ist A *nicht* wahr. \square

• Teilaufgabe 2:

Voraussetzung. Wir betrachten den folgenden deutschen Satz: Es gibt eine natürliche Zahl z mit folgender Eigenschaft: Für alle natürlichen Zahlen x ist $z \cdot x \cdot z = x$.

Formulierung als quantorenlogische Formel in der Sprache der natürlichen Zahlen. Indem wir

- „für alle natürlichen Zahlen x “ mit \forall_x ,
- „es existiert eine natürliche Zahl x “ mit \exists_x

übersetzen, entspricht der obige Satz der folgenden quantorenlogischen Formel B :

$$\exists_z \forall_x z \cdot x \cdot z = x.$$

Behauptung. Die quantorenlogische Aussage B ist wahr.

Beweis. Es genügt, eine natürliche Zahl z zu finden, für die die quantorenlogische Aussage $\forall_x z \cdot x \cdot z = x$ in der Sprache der natürlichen Zahlen wahr ist.

Wir betrachten $z := 1$. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen x , dass

$$z \cdot x \cdot z = 1 \cdot x \cdot 1 = x \cdot 1 = x.$$

Also gilt $\forall_x x \cdot x \cdot z = x$ für $z = 1$. Somit ist B wahr. \square

Lösung zu Aufgabe 4

- Teilaufgabe 1:

Voraussetzung. Seien A und B aussagenlogische Variablen.

Behauptung. Es ist $(A \triangle B) \implies (A \vee B)$ eine aussagenlogische Tautologie.

Beweis. Wir überprüfen, dass die gegebene Formel unter allen möglichen Belegungen für A und B den Wert w erhält:

A	B	$A \triangle B$	$A \vee B$	$(A \triangle B) \implies (A \vee B)$
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
f	w	w	w	w
f	f	f	f	w

Also ist $(A \triangle B) \implies (A \vee B)$ eine aussagenlogische Tautologie. \square

- Teilaufgabe 2:

Behauptung. Umgangssprachlich entspricht „① \triangle ②“ der Formulierung „entweder ① oder ②“.

Beweis. Das umgangssprachliche „entweder ... oder ...“ wird durch die folgende Wahrheitstafel modelliert:

A	B	entweder A oder B
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die Werteverteilung dieser Wahrheitstabelle stimmt mit der für „ \triangle “ überein. \square

Hinweis. Diese Operation heißt normalerweise „XOR“ (exclusive or).

Lösungsversuch zu Aufgabe 4.1

Voraussetzung. Seien A und B aussagenlogische Variablen.

Behauptung. Es ist $(A \triangle B) \implies (A \vee B)$ keine aussagenlogische Tautologie.

Beweis. Wir überprüfen, dass die gegebene Formel unter allen möglichen Belegungen für A und B den Wert w erhält:

A	B	$A \triangle B$	$A \vee B$	$(A \triangle B) \implies (A \vee B)$
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
f	w	w	w	w
f	f	f	f	w

Also ist die Behauptung falsch. \square

Korrektur. Behauptung und Beweis passen nicht zusammen. Behaupten Sie immer das, was Sie beweisen!