

# Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

Blatt 1 vom 14. Oktober 2024

**Hinweis.** Bitte lesen Sie vor dem Aufschreiben die Hinweise zu Blatt 0!

**Aufgabe 1** (klassische Semantik; 4 Punkte). Wir betrachten die aussagenlogische Formel

$$((\neg A) \implies B) \implies ((\neg A) \wedge B)$$

mit den aussagenlogischen Variablen  $A$  und  $B$ .

1. Welchen Wert erhält man in der klassischen Semantik der Aussagenlogik, wenn man in dieser Formel die Variable  $A$  mit  $w$  und die Variable  $B$  mit  $f$  belegt? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Skizzieren Sie den Syntaxbaum für diese Formel!

**Aufgabe 2** (tautologisch?!; 4 Punkte). Seien  $A$  und  $B$  aussagenlogische Variablen. Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind aussagenlogische Tautologien? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1.  $(A \implies (B \wedge (\neg B))) \implies (\neg A)$
2.  $(A \wedge B) \implies ((\neg A) \vee (\neg B))$

**Aufgabe 3** (natürliche Wahrheiten?!; 4 Punkte). Übersetzen Sie die folgende quantorenlogische Formel in der Sprache der natürlichen Zahlen in einen entsprechenden deutschen Satz (bzw. umgekehrt). Handelt es sich dabei jeweils um eine wahre quantorenlogische Aussage? Begründen Sie Ihre Antwort!

1.  $\forall_x ((\exists_y x = y + 1) \implies (\exists_z x = z + 1))$
2. Für jede natürliche Zahl  $x$  gibt es eine natürliche Zahl  $y$  mit  $x = y + 1$ .

*Hinweis.* Wir werden die natürlichen Zahlen später präzise einführen. Sie können in dieser Aufgabe Ihr Schulwissen verwenden.

**Aufgabe 4** (der Sternoperator; 4 Punkte). Wir ergänzen die aussagenlogische Syntax um folgendes:

- Sind  $A$  und  $B$  aussagenlogische Formeln, so ist auch  $(A * B)$  eine aussagenlogische Formel.

Wir ergänzen die klassische Semantik der Aussagenlogik um die folgende Interpretation:

$A$	$B$	$A * B$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben in dieser erweiterten Aussagenlogik:

1. Zeigen Sie, dass  $(A * B) \iff ((\neg A) \wedge (\neg B))$  eine aussagenlogische Tautologie ist.
2. Wie könnte man „\*“ umgangssprachlich sinnvoll übersetzen? Begründen Sie Ihre Antwort!

*Bitte wenden*

**Bonusaufgabe** (Blorxlogik; 4 Punkte). Commander Blorx hat sich die untenstehende Logik mit dem Blorxoperator  $\boxtimes$  ausgedacht. Erklären Sie, wie Commander Blorx Blorxformeln finden kann, die dieselben Wahrheitstafeln besitzen wie die gewöhnlichen Operatoren  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\implies$ ,  $\iff$  (mit ihrer klassischen Semantik). Begründen Sie Ihre Antwort!

- *Syntax.*

- Aussagenlogische Variablen sind Blorxformeln.
- Sind  $A$  und  $B$  Blorxformeln, so auch  $(A \boxtimes B)$ ; lies: „ $A$  blorx  $B$ “.
- Keine weiteren Symbolketten sind Blorxformeln.

- *Semantik.*

- Variablen können mit den Wahrheitswerten w bzw. f belegt werden.
- Belegen wir alle in einer aussagenlogischen Formel vorkommenden Variablen mit w bzw. f (wobei verschiedene Auftreten derselben Variablen in einer Formel denselben Wert erhalten müssen), so erhalten wir einen Wahrheitswert, indem wir Schritt für Schritt die folgende semantische Regel anwenden:

$A$	$B$	$A \boxtimes B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

**Hinweis.** Die Bonusaufgaben sind ein freiwilliges Zusatzangebot, sind oft manchmal komplexer oder aufwendiger bzw. basieren auf Material oder Fähigkeiten, die über die Vorlesung und die Übungen hinausgehen. Diese Aufgaben werden nicht in den Übungsgruppen besprochen. Sie dienen einfach nur als zusätzliche Anregung und Herausforderung. Man kann sich also gerne die Zähne daran ausbeißen oder sie fröhlich ignorieren.