Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 10 vom 16. Dezember 2024

Hinweis. Beachten Sie vor der Bearbeitung auch die Hinweise zu Gleichungen: https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg1_ws2425/richtungen.pdf

Fingerübung A (BLUBB!)**.** Berechnen Sie $B \cdot L \cdot U \cdot B \cdot B$ für die folgenden Matrizen in $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$:

$$B := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Fingerübung B (Transposition)**.** Berechnen Sie $X \cdot X^\top$ und $X^\top \cdot X$ für die folgende Matrix in $\mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{F}_2)$:

$$X := \begin{pmatrix} [1] & 0 & [1] \\ [0] & [1] & [1] \end{pmatrix}$$

Fingerübung C (Durcheinander)**.** Beschreiben Sie den Effekt der linearen Abbildung $L(P)\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ in Worten, wobei

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fingerübung D (Anschauung)**.** Skizzieren Sie die zugehörigen linearen Abbildungen für die folgenden Matrizen in $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Konjugationstrick; 2 Punkte)**.** Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und seien $g, h \in G$. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad (h^{-1} \cdot g \cdot h)^n = h^{-1} \cdot g^n \cdot h.$$

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Lösungsmengen; 2 $(= 1 + 1)$ Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort und skizzieren Sie diese Mengen!

1. Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = {x_1}^2\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.
2. Die Menge $\{x \in {\mathbb{F}_2}^2 \mid x_2 = {x_1}^2\}$ ist ein $\mathbb{F}_2$-Untervektorraum von ${\mathbb{F}_2}^2$.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (linear?; 2 Punkte)**.** Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die die folgenden Gleichungen simultan erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Durchschnittsdimension; 2 Punkte)**.** Sei K ein Körper und seien $U, W \subset K^4$ Untervektorräume mit den folgenden Eigenschaften: Es gilt $\dim_K W = 3$, $\dim_K U = 2$ und es gebe ein Element u in $U \setminus W$. Bestimmen Sie $\dim_K(U \cap W)$ und begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte wenden

Aufgabe 1 (Spieglein, Spieglein ...; 4 ($= 2 + 2$) Punkte)**.** Wir betrachten

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

sowie die zugehörigen linearen Abbildungen $f := L(A), g := L(B) \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

1. Berechnen Sie $A \cdot B$ und interpretieren Sie $h := g \circ f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ geometrisch.

2. Wie kann man die Spiegelung an $\mathbb{R} \cdot e_1$ als Komposition von (mehreren Exemplaren von) f und h schreiben? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 (Matrizenrechnung; 4 ($= 2 + 2$) Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Sind $A, B \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit $A \cdot B = 0$, so folgt $A = 0$ oder $B = 0$.

2. Ist $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit $A^2 = I_2$, so folgt $A = I_2$ oder $A = -I_2$.

Aufgabe 3 (das kleine Zweimalzwei; 4 ($= 2 + 2$) Punkte)**.**

1. Sei K ein Körper und seien $a, b, c, d \in K$ mit $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$. Zeigen Sie: Dann ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$ invertierbar und es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie die Menge aller Matrizen $X \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ mit

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

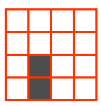
Aufgabe 4 (fiat lux?; 4 ($= 1 + 1 + 2$) Punkte)**.** Wir betrachten eine 4×4-Anordnung von Lampen; es gibt Lichtschalter, mit denen man jeweils alle Lampen in einer Zeile, in einer Spalte oder in einer (Neben)Diagonalen umschalten kann. Wir modellieren den Zustand der Lampen durch eine Matrix in $\mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{F}_2)$. Dabei bedeute $[0]$ als Koeffizient, dass die entsprechende Lampe aus ist, und $[1]$, dass die entsprechende Lampe leuchtet.

1. Wie kann man den Effekt der Lichtschalter durch Addition mit geeigneten Matrizen aus $\mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{F}_2)$ beschreiben?

2. Bestimmen Sie $I(S)$ für die Matrizen S aus dem ersten Teil, wobei

$$\begin{aligned} I \colon \mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{F}_2) &\longrightarrow \mathbb{F}_2 \\ (a_{jk})_{j,k} &\longmapsto a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{31} + a_{42} + a_{43} + a_{24} + a_{34}. \end{aligned}$$

3. Kann man in der abgebildeten Situation mit diesen Lichtschaltern erreichen, dass alle Lampen gleichzeitig leuchten? Begründen Sie Ihre Antwort!



Hinweis. Verwenden Sie I ! Die Abbildung I ist linear ...

Abgabe bis 7. Januar, 8:30, via Briefkasten/GRIPS

Wenn möglich, geben Sie bitte bereits etwas früher per GRIPS ab, um den Übungsleitern genug Zeit für die Korrektur zu geben. Geben Sie die Bonusaufgaben bitte als separate Datei/separate Blätter ab.

Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr!