Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 11 vom 7. Januar 2025

Hinweis. Beachten Sie vor der Bearbeitung auch die Hinweise zu Gleichungen: https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg1_ws2425/richtungen.pdf

Fingerübung A (Wiederholung)**.**

1. Wiederholen Sie die folgenden Begriffe: lineare Abbildung, Kern, Bild.
2. Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Wiederholen Sie den Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen $K^n \longrightarrow K^m$ und Matrizen in $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$.

Fingerübung B (Kern und Bild)**.** Bestimmen Sie Kern und Bild der durch die folgenden Matrizen X definierten linearen Abbildungen $L(X)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{Q}), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} [1] & [1] & [0] \\ [1] & [0] & [1] \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{F}_2)$$

Fingerübung C (Kern, rückwärts)**.** Geben Sie ein Beispiel für eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\ker f = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

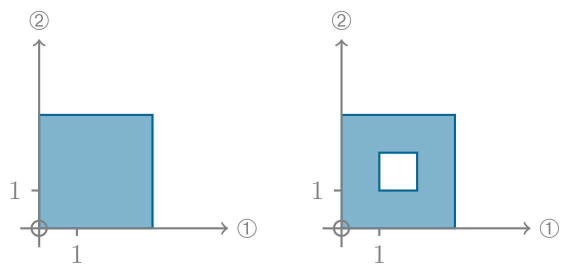
Fingerübung D (komplementärer Untervektorraum und Quotient)**.** Seien $U := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(e_1 + e_2)$, $W := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(e_2) \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} W &\longrightarrow \mathbb{R}^2/U \\ x &\longmapsto x + U \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist. Veranschaulichen Sie die Situation durch eine geeignete Skizze.

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Loch; 2 Punkte)**.** Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die das Quadrat auf der linken Seite surjektiv auf das löchrige Quadrat auf der rechten Seite abbildet? Begründen Sie Ihre Antwort!



Bitte wenden

Aufgabe 1 (Kern und Bild; 4 (= 1+1+1+1) Punkte)**.** Sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die folgenden Matrizen in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Seien $f := L(A)$, $g := L(B)\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die zugehörigen $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Bestimmen Sie $\ker f$ und $\operatorname{im} f$.
2. Zeigen Sie, dass $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein Isomorphismus ist.
3. Bestimmen Sie $\ker(g \circ f)$ und $\operatorname{im}(g \circ f)$.
4. Bestimmen Sie $\ker(f \circ g)$ und $\operatorname{im}(f \circ g)$.

Aufgabe 2 (Isomorphismen; 4 (= 2 + 2) Punkte)**.** Sei K ein Körper und seien $f\colon V \longrightarrow W$, $g\colon W \longrightarrow X$ lineare Abbildungen zwischen K-Vektorräumen. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

1. Sind f und g Isomorphismen, so auch $g \circ f$.
2. Ist $g \circ f$ ein Isomorphismus, so auch f und g.

Aufgabe 3 (Invarianz der Dimension; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper und seien V und W (endlich-dimensionale) K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Es gilt $V \cong_K W$.
2. Es gilt $\dim_K V = \dim_K W$.

Aufgabe 4 (komplementäre Untervektorräume und Quotienten; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien $U, W \subset V$ komplementäre K-Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass dann

$$\begin{aligned} \pi_U|_W \colon W &\longrightarrow V/U \\ w &\longmapsto w + U \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

Bonusaufgabe (Eilenberg-Schwindel; 4 Punkte)**.** In Professor Pirkheimers Nachlass finden sich unzählige Akten. Pirkheimers Ordnungsdrang hat ihn dazu verleitet, die Akten als Vektorraum zu organisieren. Sehr zum Ärgernis seiner Nachlassverwalter hat er es geschafft, einen nicht-trivialen Vektorraum zu verwenden, der doppelt so groß ist wie er selbst („Sonst hat man ja nie genug Platz für all die wichtigen Notizen!“). Zeigen Sie, dass es zu jedem Körper K tatsächlich einen Vektorraum V mit $V \not\cong_K \{0\}$ und

$$V \cong_K V \oplus V$$

gibt!

Abgabe bis 13. Januar 2025, 10:05, via Briefkasten/GRIPS