

# Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

Blatt 12 vom 13. Januar 2025

**Hinweis.** Beachten Sie vor der Bearbeitung auch die Hinweise zu Gleichungen: [https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg1\\_ws2425/richtungen.pdf](https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg1_ws2425/richtungen.pdf)

**Fingerübung A** (Fast-Zeilenumformung). Wir betrachten die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

über  $\mathbb{R}$ . Bestimmen Sie Basen von  $V(A_1, 0)$ ,  $V(A_2, 0)$ ,  $V(A_3, 0)$ . Welche Dimension haben diese  $\mathbb{R}$ -Vektorräume?

**Fingerübung B** (Rezept). Commander Blorx braut seine berühmte Neujahrsbrühe. Dazu verwendet er die folgenden Inhaltsstoffe:

- Kwörx: 1 Gramm Kwörx kostet 8 Gulden und duftet wie 5 Rosen.
- Slurp: 1 Gramm Slurp kostet 5 Gulden und duftet wie eine halbe Rose.
- Pfuiit: 1 Gramm Pfuiit kostet 2 Gulden und duftet wie 9 Rosen.

Das Rezept lautet: Mische so viel Kwörx, Slurp und Pfuiit, dass die entstehende Brühe 42 Gramm wiegt, 228 Gulden kostet und wie 230 Rosen duftet.

Welches lineare Gleichungssystem muss Blorx für die Zubereitung lösen? Ist dieses System homogen oder inhomogen? Beschreiben Sie das Gleichungssystem explizit und mithilfe einer Matrix! Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Was bedeutet das für die Brühe?

**Fingerübung C** (ceterum censeo ... Quotienten). Wiederholen Sie den Begriff des Quotientenvektorraums. Sei  $K$  ein Körper und sei  $f: V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung zwischen  $K$ -Vektorräumen. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung wohldefiniert ist:

$$\begin{aligned} \bar{f}: V/\ker f &\longrightarrow W \\ x + \ker f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

**Hinweis.** Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

**Bonusaufgabe (Wiederholung)** (Heisenberggruppe; 2 Punkte). Zeigen Sie, dass die folgende Menge bezüglich Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Aufgabe 1** (LGSeometrie; 4 (= 3 + 1) Punkte). Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem:

Gesucht: alle  $x \in \mathbb{R}^3$  mit

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

1. Beschreiben Sie dieses lineare Gleichungssystem mithilfe einer Matrix und lösen Sie es mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.
2. Skizzieren Sie die Lösungsmenge der ersten Gleichung, der zweiten Gleichung und des linearen Gleichungssystems in einer gemeinsamen Skizze.

*Bitte wenden*

**Aufgabe 2** (Lösungen zählen; 4 (= 2+2) Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Es gibt ein lineares Gleichungssystem über  $\mathbb{Q}$ , das genau 2025 Lösungen besitzt.
2. Es gibt ein lineares Gleichungssystem über  $\mathbb{F}_2$ , das genau 2048 Lösungen besitzt.

**Aufgabe 3** (Blorx-O-Color; 4 (= 2 + 2) Punkte). Commander Blorx sieht Farben im Blorx-O-Color-Farbmodell, das aus einer additiven Mischung der drei Grundfarben urx ( $u$ : ■), platsch ( $p$ : ■) und fizz ( $f$ : ■) besteht. In RGB (Beispiel 3.3.10) lassen sich diese Farben wie folgt spezifizieren:

$$u = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.50 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \\ 0.75 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.75 \\ 0.20 \end{pmatrix}.$$

Genauer gesagt sieht Blorx nur Farben im RGB-Würfel, die durch positive Beiträge der Grundfarben urx, platsch und fizz gemischt werden. Kann Blorx die RGB-Farbe

$$\blacksquare = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.50 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

sehen? Gehen Sie wie folgt vor:

1. Übersetzen Sie diese Frage in ein lineares Gleichungssystem.
2. Lösen Sie dieses mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren und beantworten Sie damit die Frage.

**Aufgabe 4** (Spaltenoperationen; 4 (= 2 + 2) Punkte).

1. Wie kann man Spaltenoperationen (analog zu Zeilenoperationen) durch geeignete Matrixmultiplikationen beschreiben?
2. Was müsste man berücksichtigen, wenn man auch Spaltenoperationen bei der Lösung linearer Gleichungssysteme einsetzen möchte?

**Bonusaufgabe** (XOR-SAT; 4 (= 1 + 1 + 1 + 1) Punkte). Das *exklusive Oder*  $\oplus$  ist durch die folgende Wahrheitstabelle definiert (und offenbar assoziativ):

$A$	$B$	$A \oplus B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Wir betrachten das folgende Problem: Kann man die aussagenlogischen Variablen  $A, B, C, D$  so mit Wahrheitswerten belegen, dass die Formel

$$(A \oplus B \oplus C) \wedge (A \oplus (\neg B) \oplus D) \wedge (B \oplus (\neg C) \oplus (\neg D))$$

den Wahrheitswert w liefert? Gehen Sie wie folgt vor (dies ist im allgemeinen Fall effizienter als alle Kombinationen durchzuprobieren):

1. Wenn wir w als  $[1] \in \mathbb{F}_2$  und f als  $[0] \in \mathbb{F}_2$  interpretieren, welche algebraische Beschreibung besitzt dann  $\oplus$ ?
2. Übersetzen Sie die obige Formel in ein lineares Gleichungssystem über  $\mathbb{F}_2$  mit vier Variablen und drei Gleichungen (so dass die Lösungen dieses Gleichungssystems genau den Belegungen entsprechen, unter denen die obige Formel den Wahrheitswert w liefert).
3. Lösen Sie dieses lineare Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.
4. Was bedeutet dies für das ursprüngliche Problem?