Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 13 vom 20. Januar 2025

Fingerübung A (Invertierbarkeit). Testen Sie die folgenden Matrizen auf Invertierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{F}_2)$$

Fingerübung B (darstellende Matrizen). Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} 2\cdot x_1 - x_2 \\ x_1 + 3\cdot x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $M_{B,C}(f)$ für die folgenden Kombinationen von Basen. Muss man dafür wirklich „rechnen"?!

B	C
(e_1, e_2)	(e_1, e_2)
(e_1, e_2)	(e_2, e_1)
(e_1, e_2)	$(2\cdot e_1, e_2)$

Fingerübung C (darstellende Nullmatrix?). Gibt es Basen B, C von $\mathbb{R}^2$, so dass die darstellende Matrix $M_{B,C}(f)$ der Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ aus Fingerübung B die Nullmatrix ist?

Fingerübung D (Kern und Rang). Bestimmen Sie Kern und Rang der Abbildung f aus Fingerübung B mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (invertierbare Matrizen sind quadratisch; 2 Punkte). Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Es gebe eine Matrix $B \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ mit $A \cdot B = I_m$ und $B \cdot A = I_n$. Zeigen Sie, dass dann bereits $n = m$ ist.
Hinweis. Matrizen repräsentieren lineare Abbildungen …

Aufgabe 1 (Kern und ein Bildpunkt; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte). Sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q}^4 &\longrightarrow \mathbb{Q}^3 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 + 2\cdot x_3 - x_4 \\ -x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot x_4 \\ 2\cdot x_1 + x_3 - 2\cdot x_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösen Sie folgende Aufgaben mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens:

1. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker f$.
2. Für welche $x \in \mathbb{Q}^4$ gilt $f(x) = e_1$?

Aufgabe 2 (darstellende Identitätsmatrix; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Ist $f\colon {\mathbb{F}_2}^2 \longrightarrow {\mathbb{F}_2}^2$ eine $\mathbb{F}_2$-lineare Abbildung und gibt es eine Basis B von ${\mathbb{F}_2}^2$ mit $M_{B,B}(f) = I_2$, so ist $f = \mathrm{id}_{{\mathbb{F}_2}^2}$.
2. Ist $f = \mathrm{id}_{{\mathbb{F}_2}^2}$ und sind B, C Basen von ${\mathbb{F}_2}^2$, so gilt $M_{B,C}(f) = I_2$.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (oben und unten; 4 Punkte). Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

vertauscht „oben" und „unten". Sicht durch die Blorxbrille ist durch die Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^3$ gegeben. Wie sieht der Effekt von f aus, wenn man die Blorxbrille trägt? D.h.: Bestimmen Sie die Matrix $M_{B,B}(f) \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ und geben Sie die lineare Abbildung $L(M_{B,B}(f))\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ explizit an.

Aufgabe 4 (schwache Diagonalisierung; 4 Punkte). Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{m\times n}(K)$. Zeigen Sie: Dann gibt es $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit folgender Eigenschaft: Ist

$$B := S \cdot A \cdot T,$$

so gilt für alle $(j,k) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$ mit $j \neq k$, dass $B_{j,k} = 0$.

Bonusaufgabe (innen und außen; 4 Punkte). Der begnadete Architekt Numerobis (bekannt aus dem historischen Dokument *Asterix und Kleopatra*) hat „gerade" sein neuestes Gebäude fertiggestellt:

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 3\cdot x + 2\cdot y - z \\ 2\cdot y + 3\cdot z \\ x + 4\cdot y - z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in [0,1] \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Aufgrund der unkonventionellen Bauweise ist es nicht immer ganz einfach, festzustellen, ob man sich innerhalb des Gebäudes befindet oder nicht …

1. Geben Sie einen Algorithmus an, der folgendes Problem löst und begründen Sie, warum der Algorithmus korrekt ist:
   - Gegeben $x \in \mathbb{R}^3$,
   - entscheide, ob x in N liegt oder nicht.
2. Wenden Sie diesen Algorithmus auf die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^3$ an und geben Sie das Ergebnis an (z.B. mit einem Computeralgebrasystem):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4.5 \\ 7.5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0.5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Bonusaufgabe (für Lehramtskandidaten; 4 $(= 1 + 2 + 1)$ Punkte).

1. Beschreiben Sie das Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme, das Sie in der Schule gelernt haben. Achten Sie auf Präzision!
2. Beweisen Sie, dass dieses Verfahren korrekt ist. Sie können dabei auf die in der Vorlesung behandelten Methoden und Resultate zurückgreifen.
3. Wie könnte man die Korrektheit des Verfahrens in einer für Oberstufenschüler verständlichen Weise begründen?

Abgabe bis 27. Januar 2025, 10:05, via Briefkasten/GRIPS